

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

37. Band, Heft 4/6

1. Mai 1951

S. 145—288

Algebra und Zahlentheorie.

Lineare Algebra. Polynome. Formen. Invariantentheorie:

Popov, B. S.: Remarques sur quelques déterminants. Fac. Phil. Univ. Skopje, Sect. Sci. nat., Annuaire 2, 195—202 und französ. Zusammenfassg. 202—205 (1949) [Mazedonisch].

Verf. bemerkt, daß Cesàro der von Novarese betrachteten symmetrischen Determinante

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x + a_0 + a_1 & x - a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x - a_1 & x + a_1 + a_2 & x - a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x - a_{n-1} & x + a_{n-1} + a_n \end{vmatrix}$$

fälschlicherweise (für $n > 1$) den Wert $a_0 a_1 \cdots a_n \sum_{v=0}^n (a_v^{-1} + x^v \sigma_v)$ mit

$\sigma_i = \sum_{v=0}^{n-i} a_v^{-1} a_{v+i}^{-1}$ zugeschrieben hat, und zeigt, daß dieser Wert einer aus $D_n(0)$

durch Ränderung hervorgehenden Determinante zukommt. Der Nachweis hierfür wird mit der von Cauchy stammenden Ränderungsformel geführt und diese Formel noch je auf eine von Sardi-Rosace-Hurwitz und von Escherich behandelte Determinante angewendet. *Rohrbach (Mainz).*

Good, I. J.: On the inversion of circulant matrices. Biometrika, Cambridge 37, 185—186 (1950).

Von Quenouille (dies. Zbl. 33, 199) wurde gezeigt, daß gewisse Problemstellungen bei der Trendelimination eine Inversion von Matrizen der Form $A = \{a_{j-i}\}$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$; $j = 0, 1, \dots, n-1$) erfordern, die man, da ihre Determinanten die besondere Struktur der „Zirkulanten“ annehmen, auch als „Zirkulizen“ bezeichnet. — Den Gegenstand der vorliegenden Note bildet die kurze Beschreibung einer einfachen Methode der Inversion von Zirkulizen. Das Verfahren gründet sich auf Formeln, die die Eigenwerte von A als Ausdrücke in den Elementen der Zirkulix A wiedergeben und umgekehrt. Die invertierte Zirkulix A^{-1} ist dann diejenige, deren Eigenwerte die Reziproken derjenigen von A sind. *G. Wünsche.*

Lepage, Th.: Sur les matrices symétriques et les modules de formes alternées. Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. S. 35, 325—345 (1949).

Bezeichnen griechische Buchstaben Elemente der alternierenden Formenalgebra in $2n$ Unbestimmten x_i, y_i ($i = 1, 2, \dots, n$) über einem Körper (Charakteristik 0 oder $> n$), ist insbesondere $\Gamma_{(k)} = \sum \alpha_i \alpha_{i_2} \cdots \alpha_{i_k}$ mit $\alpha_i = x_i y_i$, wo die Summe über die $\binom{n}{k}$ Kombinationen von $1, 2, \dots, n$ zu je k zu erstrecken und die Multiplikation von Formen stets als äußere (alternierende) im Sinne von Grassmann zu verstehen ist, so wird zunächst gezeigt: Jedes \mathcal{Q}_m vom Grade m ist eindeutig darstellbar für $m > n$ als ein Produkt $\vartheta_{n-m} \Gamma_{(m)}$ und für $m \leq n$ als direkte Summe $\mathcal{Q}_m = \mathcal{Q}_{m-2} \Gamma_{(1)} + \cdots + \mathcal{Q}_{m-2q} \Gamma_{(q)}$ mit Formen \mathcal{Q}_p , für die stets $\varrho_p \Gamma_{(n-p+1)} = 0$ ist. Der Modul aller \mathcal{Q}_p desselben Grades $p \leq n$ sei $\{\mathcal{Q}_p\}$. Sodann werden Resultate einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 35, 292) präzisiert, indem für jeden Modul $\{\mathcal{Q}_p\}$, $p = 1, 2, \dots, n$, die Existenz einer Basis nachgewiesen wird, die ganz aus

einfachen Formen besteht. Dabei wird unter einer einfachen Form σ_p vom Grade p ein Produkt von p linear unabhängigen Linearformen $\xi_i = \sum_j (a_{ij} x_j + b_{ij} y_j)$ verstanden ($i = 1, 2, \dots, p$; $j = 1, 2, \dots, n$). Hierdurch lassen sich den einfachen Formen rechteckige Matrizen (A, B) zuordnen mit $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, die sich im Spezialfall $p = n$ (der im Zusammenhang mit der zitierten Arbeit des Verf. von Interesse ist) auf (P, E) reduzieren, wo P eine symmetrische, orthogonale Matrix n -ten Grades mit Elementen $0, \pm 1$ und E die Einheitsmatrix ist. Die Zusammenhänge werden eingehend erörtert und Anwendungen auf die Matrizen (A, B) gebracht.

Rohrbach (Mainz).

Lepage, Th.: Sur les fonctions linéaires des mineurs d'une matrice symétrique. Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. S. 35, 694—708 (1949).

Unter Beschränkung auf den Fall $p = n$ (vgl. das vorangehende Referat) werden lineare Funktionen $f(P)$ mit komplexen Koeffizienten der Unterdeterminanten n -ten Grades einer Matrix (P, E) untersucht; die Elemente p_{ij} von P seien Unbestimmte. Für $n = 2$ weiß man, daß jedes $f(P)$ als Determinante $|A + B P|$ darstellbar ist und z. B. die Monge-Ampèresche Differentialgleichung $f(P) = 0$, $p_{ij} = \partial^2 z / \partial x_i \partial x_j$, nur ein System von Charakteristiken oder deren zwei besitzt, je nachdem $AB' - BA'$ den Rang 0 oder 2 hat. Für die Sachlage im Fall $n > 2$ ist, wie Verf. unter Benutzung von Ergebnissen der vorstehend referierten Arbeit zeigt, der zwischen dem Modul der linearen Funktionen $f(P)$ und dem Modul $\{\varrho_n\}$ bestehende Isomorphismus von Bedeutung [hierbei wird jedem $f(P)$ eine bestimmte Klasse von Formen ϱ_n zugeordnet]. Denn eine Darstellung $f(P) = |A + B P|$ ist für $n > 2$ dann und nur dann möglich, wenn die dem $f(P)$ entsprechende Klasse mindestens eine einfache Form besitzt. Und in diesem Fall wird der Funktion $f(P)$, dem Klassenvertreter ϱ_n und der Klasse selbst die Bezeichnung charakteristisch beigelegt. Eine Klasse kann übrigens höchstens zwei linear unabhängige einfache Formen besitzen. Zum Schluß werden mehrere Fälle von charakteristischen Formen untersucht.

Rohrbach (Mainz).

•Tschebotarow (Čebotarev), N.: Grundzüge der Galoisschen Theorie. Übersetzt und bearbeitet von H. Schwerdtfeger. Groningen-Djakarta: P. Noordhoff N. V. 1950. XVI, 432 S., 17,50 f, geb. 20,—f.

Leider ist aus keiner Stelle des Buches ersichtlich, wann und wo das russische Original, von dem hier eine Übersetzung vorliegt, erschienen ist. Es handelt sich wohl um das Buch „Grundlagen der Galoistheorie I“ von Tschebotarow, das 1934 in einem Staatsverlag in Moskau erschienen ist. Dieses Buch umfaßt 221 Seiten, die vorliegende Übersetzung 432 Seiten. Auch wenn man das großzügig weite Druckbild des neuen Buches berücksichtigt, geht schon aus dem Vergleich der Seitenzahlen hervor, daß es sich hier nicht nur um eine Übersetzung, sondern um eine wesentliche Überarbeitung und Ergänzung des Tschebotarowschen Buches handelt. Nicht einmal die alte Kapiteileinteilung wurde unverändert übernommen. — Tschebotarow, der inzwischen verstorben ist, hat für die deutsche Übersetzung ein Vorwort geschrieben, in der eingangs von der klassischen und der abstrakten Algebra gesprochen wird. Es heißt dann weiter: „So ist es nicht erstaunlich, daß ein großer Teil der modernen algebraischen Lehrbücher sich der abstrakten Richtung angeschlossen hat, welche im Bereich der Forschung so große Erfolge zu verzeichnen hatte. Jedoch mehr als einmal hatte ich Gelegenheit zu beobachten, daß dies im Bereich der Lehre nicht durchweg der Fall ist. Viele der jungen Wissenschaftler, die sich zu ausschließlich der modernen Denkweise verschrieben hatten, schienen mir zwar sehr wohl instande zu sein, ihnen von früher bekannte Tatsachen zu verallgemeinern; zur Aufdeckung wirklich neuer Zusammenhänge hingegen ist, wie mir scheint, eine genaue Kenntnis der älteren Entwicklungen und eine Übung in der Konstruktion der allgemeinen Begriffsbildungen in speziellen Beispielen häufig unentbehrlich“. Dem Referenten scheint das Charakteristische und das Ansprechende des Buches darin zu liegen, daß nicht nur die tragenden Säulen der Theorie aufgestellt werden, sondern auch die Innenarchitektur nicht übersehen wird. Es ließen sich dazu viele Einzelheiten im Haupttext und in den zahlreichen beigegebenen Beispielen und Übungsaufgaben anführen. Als Besonderheit muß angeführt werden, daß die galoissche Gruppe eines Polynoms mit Hilfe der von Mertens [S.-B. Akad. Wiss., Wien, math.-naturwiss. Kl. II a 111, 17—37 (1902)] eingeführten Fundamentalmoduln definiert wird. Die Mertenssche Begründung hat bisher noch keine lehrbuchmäßige Darstellung gefunden. Verf. motiviert diese Dar-

stellung damit, daß man erstens so die beste Möglichkeit hat, alle Relationen zwischen den Wurzeln einer Gleichung zu übersehen, daß sich zweitens diese Begründung zu einem Aufbau der galoisschen Theorie ausbauen läßt, welcher den Satz von der Wurzelexistenz nicht voraussetzt, und daß schließlich diese Art in zwangloser Weise den Übergang gestattet zur Loewyschen Verallgemeinerung der galoisschen Theorie. — Nun die Einteilung des Buches: I. Gruppentheorie (Grundbegriffe, Untergruppen, transitive und intransitive, primitive und imprimitive Permutationsgruppen, Normalteiler und Faktorgruppe, Isomorphismus und Homomorphismus, Darstellung von Gruppen durch Permutationen, Kompositionsreihen, auflösbare Gruppen). II. Algebraische Grundbegriffe (Körper, Polynome, Wurzeln algebraischer Gleichungen, Polynome in mehreren Unbestimmten, symmetrische Funktionen, algebraische Erweiterungen). III. Die galoissche Gruppe (Relationen unter den Wurzeln, einfachste Eigenschaften, Untergruppe—Unterkörper, Erweiterung des Grundkörpers, Aufstellung der galoisschen Gruppe). IV. Auflösbare Gleichungen (Zyklische und reine Gleichungen, Kreisteilungsgleichungen, p -te Kreisteilungsgleichung, auflösbare Gleichungen — auflösbare Gruppen, reell-auflösbare Körper, Konstruktionen mit Zirkel und Lineal). V. Gleichungen mit vorgeschriebener Gruppe (endliche Körper, galoissche Theorie einer Kongruenz nach einem Primzahlmodul, Gleichungen mit symmetrischer Gruppe, Methode von Hilbert von E. Noether). — Die Kapitel I, III, IV sind durch Anhänge bereichert worden, die allein von Schwerdtfeger stammen: 1. Über die Verallgemeinerung des Gruppenbegriffs, insbesondere die Loewyschen Mischgruppen. 2. Zum Bertrandschen Satz. 3. Die Loewysche Verallgemeinerung der galoisschen Theorie. 4. Tabelle der Kreisteilungspolynome für alle Indizes bis 60. Das Buch schließt mit einem Anhang „Elemente der rationalen Zahlentheorie“, in dem das im Buch benötigte zahlentheoretische Rüstzeug bereitgestellt wird. Ferner findet man vorne außer einem Namenregister ein dreisprachiges (deutsch, englisch, französisch) Sachregister. Schwerdtfeger hat die Literaturhinweise, insbesondere im Hinblick auf die Weiterentwicklung der Theorie, bis zum Jahre 1940 ergänzt. Das Buch ist in sich geschlossen insofern, als alle benötigten Hilfsmittel in ihm erarbeitet werden, und daher als Lehrbuch hervorragend geeignet. — Tschebotarow hat wohl 1937 einen II. Band seiner „Grundlagen der Galoistheorie“ herausgebracht, der Ref. nicht zugänglich ist. Es wäre außerordentlich zu begrüßen, wenn Schwerdtfeger und der Verlag sich entschließen könnten, auch eine deutsche Übersetzung des II. Bandes herauszubringen.

H. L. Schmid (Berlin).

Borofsky, Samuel: Solvability of quartics by means of square roots. Amer. math. Monthly **57**, 248—250 (1950).

Beweis folgender fast trivialer Sätze ohne Zuhilfenahme der galoisschen Theorie: Die Koeffizienten von $f(x) = x^4 + p x^3 + q x^2 + r x + s$ seien rational in a_1, a_2, \dots, a_m und $g(y)$ sei die kubische Resolvente von $f(x)$. 1. Wenn $f(x)$ eine Nullstelle besitzt, die aus den a_μ durch rationale Operationen und Quadratwurzeln entsteht, aber nicht rational in den a_μ ist, dann entstehen alle Nullstellen aus den a_μ durch rationale Operationen und Quadratwurzeln. 2. Dann und nur dann entstehen alle Nullstellen von $f(x)$ durch rationale Operationen und Quadratwurzeln aus den a_μ , wenn dasselbe für die Nullstellen von $g(y)$ gilt. 3. $f(x)$ besitzt dann und nur dann eine Nullstelle, die aus den a_μ durch rationale Operationen und Quadratwurzeln entsteht, wenn $f(x)$ oder $g(y)$ eine in den a_μ rationale Nullstelle hat.

H. L. Schmid (Berlin).

Roth, William E.: On the eliminant of $f(\lambda x)$ and $f(\lambda/x)$. J. London math. Soc. **25**, 232—236 (1950).

Mit Matrizenrechnung wird bewiesen, daß die dialytische Eliminate Sylvesters für die beiden Polynome n -ten Grades $f(\lambda x)$ und $x^n f(\lambda/x)$ das Produkt aus $f(\lambda)$, $f(-\lambda)$ und einem Quadrat ist. Das Quadrat wird als Quadrat einer $(n-1)$ -reihigen Determinante dargestellt, deren Elemente einfache Ausdrücke in f sind. Der erste Beweis des Satzes stammt von Elliott, 1894, ist aber analytisch geführt. Lochs.

Bulgakov, B. V.: Die Diskriminantenkurve und das Gebiet der aperiodischen Stabilität. Priklad. Mat. Mech., Moskva **14**, 453—458 (1950) [Russisch].

In der Arbeit wird eine algebraische Gleichung

$$\Delta(z) \equiv P(z)\mu + Q(z)\nu + R(z) = 0$$

betrachtet, deren (reelle) Koeffizienten von zwei Parametern μ, ν abhängen; es sollen diejenigen Werte der Parameter bestimmt werden, für die die Gleichung reelle und zwar insbesondere negative Wurzeln hat. Verf. bildet zur Lösung der Aufgabe aus $\Delta(z) = 0$ und $\Delta'(z) = 0$ die „Diskriminantenkurve“ Y in der μ - ν -Ebene, deren Parameterdarstellung durch

$$\mu = \frac{Q(\varepsilon)R'(\varepsilon) - Q'(\varepsilon)R(\varepsilon)}{P(\varepsilon)Q'(\varepsilon) - Q(\varepsilon)P'(\varepsilon)}, \quad \nu = \frac{R(\varepsilon)P'(\varepsilon) - R'(\varepsilon)P(\varepsilon)}{P(\varepsilon)Q'(\varepsilon) - Q(\varepsilon)P'(\varepsilon)}$$

gegeben ist ($-\infty < \varepsilon < +\infty$), und stellt folgende Regel auf: Man durchlaufe Y in Richtung abnehmender ε -Werte und denke sich für positive Werte des obigen Nenners $\Gamma(\varepsilon) \equiv P(\varepsilon)Q'(\varepsilon) - Q(\varepsilon)P'(\varepsilon)$ die Gebiete auf der linken Seite der Kurve Y schraffiert, für $\Gamma(\varepsilon) < 0$ die rechts gelegenen. Dann verschwindet beim Übergang von einem unschraffierten Gebiet (der μ - ν -Ebene) in ein schraffiertes genau ein Paar komplexer Wurzeln der (von μ und ν abhängenden) Gleichung $\Delta(z) = 0$. — Mit Hilfe dieser Regel kann man Gebiete finden, in denen alle Paare komplexer Wurzeln verschwunden sind, $\Delta(z)$ also nur noch reelle Wurzeln hat. — Der Beweis läßt an Strenge etwas zu wünschen übrig, auch sind die eingeführten Hilfsbegriffe nicht immer ganz klar definiert. W. Hahn (Berlin).

Corput, J. G. van der: Sur les fonctions symétriques. Proc. Akad. Wet., Amsterdam **53**, 703—717 (1950); Indag. math., Amsterdam **12**, 216—230 (1950).

Die ganzen rationalen symmetrischen Funktionen von m Veränderlichen z_1, \dots, z_m lassen sich additiv aufbauen aus „einfachen“ Summen

$$S(z) = \{k_1, k_2, \dots, k_r\} = \sum z_1^{k_1} \dots z_r^{k_r},$$

wobei sich \sum über alle $m!$ Permutationen erstreckt. Die einfachsten dieser einfachen Summen sind die elementarsymmetrischen Funktionen

$$a_1 = \sum z_i = \{1\}, a_2 = \sum z_1 z_2 = \{1, 1\}, \dots, a_m = z_1 z_2 \dots z_m$$

und die Potenzsummen

$$s_1 = \sum z_i = \{1\}, s_2 = \sum z_i^2 = \{2\}, \dots, s_m = \sum z_i^m = \{m\}.$$

Der Hauptsatz über symmetrische Funktionen besagt dann, daß jedes $S(z)$ ein Polynom $G(a)$ der a_i und vermöge der Newtonschen Gleichungen auch ein Polynom $P(s)$ der s_i ist:

$$S(z) = G(a) = P(s), \quad G(a) = \sum c_{ijk\dots} a_i a_j a_k \dots$$

Die Frage, wie man bei gegebenem $S(z)$ die Koeffizienten $c_{ijk\dots}$ von $G(a)$ finden kann und zwar auf eine Weise, die tatsächlich durchrechenbar ist, wo also die Unbekannten von nicht allzu vielen linearen Gleichungen zu ermitteln sind, hat Verf. in einer früheren Arbeit behandelt [Christiaan Huygens **18**, 251—277 (1940)]. Er gebraucht hierzu gewisse Differentialoperatoren

$$A_1 = [1] = \sum a_{\mu-1} \frac{\partial}{\partial a_{\mu}}, \quad A_2 = [1, 1] = \frac{1}{2} \sum \sum a_{\mu-1} a_{\nu-1} \frac{\partial^2}{\partial a_{\mu} \partial a_{\nu}}, \dots \text{ und}$$

$$[h] = \sum_{\mu=h}^m a_{\mu-h} \frac{\partial}{\partial a_{\mu}},$$

die, auf $G(a)$ angewendet, die einfachen Summen $S(z)$ verkürzen. Es besteht dann ein Isomorphismus zwischen dem Ring dieser Operatoren und den Polynomen der a_i , wobei jeder einfachen Summe $\{k_1, k_2, \dots, k_r\}$ ein Operator $[k_1, k_2, \dots, k_r]$ entspricht. Dem Operator $[h]$ sind die Potenzsummen $\{h\}$ zugeordnet, so daß z. B. mit $s_2 = \{2\} = a_1^2 - 2a_2$ auch $[2] = A_1^2 - 2A_2$ gilt. — Die Reduzierbarkeit von $S(z)$ durch die Operatoren A_i beruht auf einem Orthogonalitätssatz und einem Reziprozitätstheorem. Beim Beweis des Hauptsatzes werden die Potenzsummen s_i eingeschaltet. Nach Ansicht des Ref. wird die Berechnung der Koeffizienten $c_{ijk\dots}$ von $G(a)$ sehr durchsichtig, wenn man von der Gleichung $[h](G(a)) = (-1)^{h+1} h \partial P / \partial s_h$ Gebrauch macht und die Operatoren $[h]$ durch Determinanten der A_i ausdrückt, die sich leicht aus den Newtonschen Gleichungen ergeben. Weitzenböck.

Turnbull, H. W.: Note upon the generalized Cayleyan operator. Canadian J. Math. **1**, 48—56 (1949).

Aus der ternären Normalform $\Phi = (xyz)(xy\alpha)(x\beta\gamma)$ können durch den Operator $C_{\Omega} = (\partial/\partial x \partial/\partial y \partial/\partial z) \cdot (\delta\varepsilon |\partial/\partial x \partial/\partial y|^2 (\zeta |\partial/\partial x|$ die Reihen x, y und z weggeschafft werden:

$$(1) \quad C_{\Omega} \Phi = 576 (\delta\varepsilon\alpha)^2 (\zeta\beta\gamma).$$

C_Ω ist eine Verallgemeinerung des Cayleyschen Ω -Prozesses ($\partial/\partial x \partial/\partial y \partial/\partial z$), für den bekanntlich $\Omega(xyz) = 3!$ und allgemeiner $\Omega^p(xyz)^p = c_p$ gilt, wo c_p eine natürliche Zahl > 0 ist. — Verf. konstruiert allgemein für n -äre Normalformen einen Operator C_Ω , für den eine zu (1) analoge Formel gilt. Er zeigt, daß sich als Spezialfall die Formel von Capelli ergibt und daß sich C_Ω in ein Youngsches Schema einordnen läßt, wobei nicht einzelne Größen, sondern Koordinatenreihen als permutierte Elemente auftreten.

Weitzenböck (Overveen, Holland).

Todd, J. A.: The complete irreducible system of two quaternary quadratics. Proc. London math. Soc., II. S. 52, 1—13 (1950).

Im Anschluß an eine Arbeit von H. W. Turnbull (dies. Zbl. 36, 290) wird gezeigt, daß sich das dort gegebene System von 125 Komitanten zweier quaternärer quadratischer Formen auf 114 irreduzible reduzieren läßt.

Weitzenböck.

Foulkes, H. O.: Concomitants of the quintic and sextic up to degree four in the coefficients of the ground form. J. London math. Soc. 25, 205—209 (1950).

Nach der von D. E. Littlewood [Phil. Trans. R. Soc., London, A 239, 305—365 (1944)] entwickelten Methode der S -Funktionen werden für die binären Formen fünften und sechsten Grades die Komitanten formell ermittelt, die höchstens vom Grade vier in den Koeffizienten der Grundformen sind.

Weitzenböck.

Gruppentheorie:

●Burekhardt, J. J.: Die Bewegungsgruppen der Kristallographie. Basel: Birkhäuser 1947. 186 p. 29 fr.

Das Ziel des Buches ist eine rein mathematische und in allen Einzelheiten auch dem Nichtmathematiker verständliche Behandlung der Kristallklassen und Bewegungsgruppen. Die frühere einschlägige Literatur war meistens entweder nur dem Mineralogen oder nur dem Mathematiker zugänglich. Es gelang dem Verf., den Ansprüchen beider Arten von Lesern zu entsprechen, indem er alle mathematischen Hilfsmittel und Überlegungen klar darlegt, nur durch die kristallographische Zielsetzung bedingte mathematische Hilfsmittel gebraucht und die (Schoenfliesschen) Bezeichnungen und Benennungen der Kristallographie benützt, andererseits aber seinen Stoff in rein mathematischer Weise behandelt und so auch das Interesse des reinen Mathematikers für den aus der Kristallographie entsprungenen Gegenstand erweckt. — Die Behandlung ist durch Einführung des Begriffes der arithmetischen Kristallklassen geprägt. Man betrachte die Bewegungen des Raumes, die einen Fixpunkt besitzen und die Punkte eines Punktgitters ineinander überführen, daher einen Automorphismus des Punktgitters erzeugen. Eine Gruppe von solchen Decktransformationen heißt eine geometrische Kristallklasse. Eine durch diese hervorgerufene Gruppe von Automorphismen eines Punktgitters wird eine arithmetische Kristallklasse genannt. Es kommt vor, daß dieselbe Decktransformation bei verschiedenen Punktgittern verschiedene Automorphismen hervorruft (wie z. B. die Symmetrie beim zweidimensionalen rechteckigen bzw. rhombischen Gitter), daher ist der Begriff der arithmetischen Kristallklasse enger als der der geometrischen. Die Kristallsysteme sind durch die Holoedrien bestimmt, d. h. durch jene geometrischen Kristallklassen, die Gruppen aller Decktransformationen irgendeines Punktgitters sind. Werden auch fixpunktlose Bewegungen zugelassen, so können die entsprechenden Begriffe definiert werden, und es erhebt sich die Frage nach den Bewegungsgruppen. — Es werden nach einleitenden, die mathematischen Hilfsmittel darlegenden Kapiteln im zwei- und dreidimensionalen Falle die Kristallsysteme, die geometrischen Kristallklassen, die arithmetischen Kristallklassen (13 in der Ebene bzw. 73 im Raume) und die Bewegungsgruppen (17 bzw. 230) abgeleitet und aufgezählt. Auch für den n -dimensionalen Fall werden einige Betrachtungen beigelegt.

G. Hajós (Budapest).

Fuchs, Ladislav: On partially ordered groups. Proc. Akad. Wet., Amsterdam 53, 828—834; Indag. math., Amsterdam 12, 272—278 (1950).

Eine Gruppe G heißt teilweise angeordnet (partially ordered), wenn sich zwischen (nicht notwendig allen) Elementen x, y aus G eine Beziehung $x \geq y$ mit folgenden Eigenschaften definieren läßt: $x \geq x$; aus $x \geq y, y \geq z$ folgt $x \geq z$; aus $x \geq y, y \geq x$ folgt $x = y$ und aus $x \geq y$ folgt $u + x + v \geq u + y + v$. Ferner gelte die Moore-Smith-Eigenschaft (MS): zu jedem x, y gibt es ein z mit $z \geq x, z \geq y$. — (Siehe auch Fuchs, dies. Zbl. 33, 100). — Die homomorphe Abbildung $G \rightarrow H$ heißt o -homomorph, wenn die Anordnung bei dieser Abbildung erhalten bleibt. Zwei Gruppen heißen tautomorph, wenn sie im gewöhnlichen Sinne isomorph sind, hinsichtlich ihrer Anordnung aber nur o -homomorph. Bei der o -homomorphen Abbildung von G auf H muß die invariante Untergruppe C von G aller auf Null abgebildeten Elemente konvex sein, das heißt, sie muß mit x, y alle Elemente zwischen x und y enthalten. Umgekehrt bestimmt jede konvexe invariante Untergruppe einen o -Homomorphismus. H ist dann und nur dann ein o -homomorphes Bild von G , wenn G/C zu H tautomorph ist. Verf. beweist zwei Tautomorphiesätze, die wörtlich den beiden Isomorphiesätzen für Gruppen entsprechen, wenn man statt isomorph tautomorph, statt homomorph o -homomorph schreibt. Alle auftretenden invarianten Untergruppen sind konvex. — Die Anordnung einer Gruppe heißt normal, wenn aus $n x \geq 0$ für jede positive ganze Zahl n folgt $x \geq 0$. Verf. zeigt, daß jede Gruppe mit normaler teilweiser Anordnung ohne echte konvexe Untergruppe zu einer Untergruppe der additiven Gruppe der reellen Zahlen isomorph ist. Die Anordnung $>$ bedeutet dann „größer“. — Schließlich wird als Ideal noch eine Untergruppe J von G definiert, die zu einem a alle x mit $\|x\| \supset \|a\|$ enthält und in der die MS-Eigenschaft gilt (über $\|a\|$ vgl. die zitierte Arbeit). Ein Komplex J ist dann und nur dann ein Ideal, wenn er eine invariante konvexe Untergruppe ist und MS gilt.

Wever (Mainz).

Jaffard, Paul: Théorie des filets dans les groupes réticulés. C. r. Acad. Sci., Paris 230, 1024—1025 (1950).

Soit G un groupe abélien réticulé (ou „lattice-ordered abelian group“), et G_+ l'ensemble des éléments positifs ou nuls de G . Deux éléments a et b de G_+ sont étrangers si $a \cap b = 0$. L'A. définit alors l'équivalence suivante dans G_+ : $a \equiv b$ lorsque tout x de G_+ étranger à a est aussi étranger à b et vice-versa. Il appelle filet \bar{a} la classe d'équivalence de a . L'ensemble F des filets se trouve partiellement ordonné par la relation: $\bar{a} \geq \bar{b}$ lorsque tout x de G_+ étranger à a est aussi étranger à b , a et b étant deux représentants de \bar{a} et \bar{b} ; le choix de ces représentants est indifférent. L'ensemble F constitue même un treillis („lattice“) ayant les propriétés:

$$\bar{a} \cap \bar{b} = \overline{a \cap b} \quad \text{et} \quad \bar{a} \cup \bar{b} = \overline{a \cup b}$$

qui font de F un treillis distributif (théorème 1). L'A. fait ensuite les remarques suivantes: étant donnés deux filets \bar{a} et \bar{a}' tels que $0 < \bar{a}' \leq \bar{a}$, on peut trouver un filet \bar{a}'' vérifiant $0 < \bar{a}'' \leq \bar{a}$ et $\bar{a}' \cap \bar{a}'' = 0$. (théorème 2). Les éléments d'un filet minimal ($\bar{a} \neq 0$ est minimal lorsque $\bar{x} < \bar{a}$ entraîne $\bar{x} = 0$) engendrent un sous-groupe de G totalement ordonné (théorème 3). Enfin le sous-groupe engendré par les éléments d'un ensemble de filets minimaux est la somme directe des sous-groupes totalement ordonnés engendrés par les éléments de chacun de ces filets minimaux.

L. Lesieur (Poitiers).

Mal'cev, A. I.: Über Gruppen endlichen Ranges. Mat. Sbornik, n. S. 22 (64), 351—352 (1948) [Russisch].

Verf. untersucht unendliche Abelsche Gruppen von endlichem Rang, welche eine isomorphe Darstellung durch Matrizen n -ten Grades in einem Körper K be-

sitzen. Solche Gruppen sind natürlich abzählbar, wenn K abzählbar ist. Verf. gibt aber einen Beweis für die Abzählbarkeit unabhängig von dieser Voraussetzung.

Brandt (Halle).

Tartakovskij, V.: Über das Identitätsproblem für einige Typen von Gruppen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 58, 1909—1910 (1947) [Russisch].

Vgl. eine spätere Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 34, 163), in der die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit ausführlich begründet werden.

R. Kochendörffer.

Schogt, C.: Einige Sätze von Lubelski aus der Gruppentheorie. Actual. Math. Centrum, Amsterdam, Rapport ZW 1949, 012, 13 S. (1949) [Holländisch].

Elementarer Beweis des folgenden Satzes von Lubelski: Es sei $M = \prod_{k=1}^s p_k^{a_k}$

ein Teiler der Ordnung n der endlichen Gruppe \mathfrak{G} , $T = \prod_{k=1}^s p_k^{\alpha_k}$ ($1 \leq \sigma \leq s$; $1 \leq \alpha_k \leq a_k$) sei ein Teiler von M ; schließlich bedeute K die Anzahl aller der Gruppenelemente, deren Ordnung ein Vielfaches von T und einen Teiler von M darstellt. Dann ist K ein Teiler von $M \cdot \prod_{k=1}^s p_k^{\alpha_k - a_k - 1}$. — Von den Sätzen der

Gruppentheorie werden über die allerelementarsten Grundlagen hinaus nur die einfachsten Eigenschaften des Normalisators eines beliebigen Komplexes benutzt. Die Hauptschwierigkeit beim Beweise des Lubelskischen Theorems ist die Erledigung des Falles $\sigma = 1$, $\alpha_1 = a_1$. Hier führt ein mühsamer Induktionsschluß nach wachsendem n zum Ziel.

Krull (Bonn).

Szekeres, G.: Determination of a certain family of finite metabelian groups. Trans. Amer. math. Soc. 66, 1—43 (1949).

Es sei \mathfrak{G} eine endliche metabelsche Gruppe der Ordnung nh , wobei h die Ordnung eines abelschen Normalteilers \mathfrak{A} bedeutet und die Ordnung n von $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ nicht durch das Quadrat einer in h aufgehenden Primzahl teilbar ist. Die Arbeit gibt ein vollständiges System von Invarianten für \mathfrak{G} , d. h. eine Aufzählung aller \mathfrak{G} , bei der jede Gruppe nur einmal vorkommt. Das Problem läßt sich sofort auf den Fall reduzieren, daß die Ordnung der additiv geschriebenen Gruppe \mathfrak{A} eine Potenz p^f einer Primzahl p ist. Es ist $n = m p^k$ mit $k = 0$ oder $k = 1$, $(p, m) = 1$. \mathfrak{F} definiert einen Operatorenring \mathfrak{R}_p in $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^{(p)}$. Dieser kann konstruiert werden als homomorphes Bild des Ringes $\mathfrak{R}_{n,f}$, der seinerseits der Quotientenring des Ringes $\mathfrak{P}[x]$ der Polynome in x mit ganzen p -adischen Koeffizienten nach dem von $\varepsilon x^n - \varepsilon$ und $p^f \varepsilon$ erzeugten Ideal ist (ε bedeutet die p -adische Einheit, die weiterhin auch mit 1 bezeichnet wird). Die Konstruktion aller \mathfrak{G} wird reduziert auf die Aufgaben: 1. Ein System direkt unzerlegbarer nicht isomorpher \mathfrak{R}_p -Moduln $\mathfrak{A}^{(p)}$ anzugeben, wobei die zugelassenen \mathfrak{R}_p homomorphe Bilder von $\mathfrak{R}_{n,f}$ sind und 2. eine Normalform für ein Element H von $\mathfrak{A}^{(p)}$ zu finden, das der Gleichung $\sigma H = H$ genügt, wobei σ der dem erzeugenden Element x von \mathfrak{R}_p entsprechende Automorphismus von $\mathfrak{A}^{(p)}$ ist (es ist σ^n die Identität). Dazu wird $x^m - 1 = \varphi_0(x) \varphi_1(x) \cdots \varphi_t(x)$ in $t \bmod p$ irreduzible Faktoren zerlegt. Diesen entsprechen eindeutig bestimmte Polynome $\varphi_r(x)$ und $\Phi_r(x)$ in $\mathfrak{P}[x]$, so daß in $\mathfrak{P}[x]$ für $r = 1, 2, \dots, t$, $x^m - 1 = \varphi_0 \varphi_1 \cdots \varphi_t$, $x^n - 1 = \Phi_0 \Phi_1 \cdots \Phi_t$, $\varphi_r \equiv \bar{\varphi}_r \pmod{p}$, $\Phi_r \equiv (\bar{\varphi}_r)^{p^k} \pmod{p}$. Hierbei ist φ_r irreduzibel in $\mathfrak{P}[x]$. Dann kann $\mathfrak{A}^{(p)}$ direkt zerlegt werden in die Komponenten $\mathfrak{A}_i^{(p)}$, die durch $\varphi_r(\sigma) \mathfrak{A}_i^{(p)} = 0$ definiert sind; es existiert dann auch stets ein Exponent i , so daß $(\varphi_r(\sigma))^i \mathfrak{A}_i^{(p)} = 0$ ist. Falls $k = 0$ ist [d. h. $(n, p) = 1$], ist dann ein direkt unzerlegbarer \mathfrak{R}_p -Modul $\mathfrak{A}_i^{(p)}$ eine Gruppe der Ordnung $p^{2\lambda}$ und vom Typ (p^l, \dots, p^l) , wobei λ der Grad von $\varphi_r(x)$ ist; $\mathfrak{A}_i^{(p)}$ kann dann (als \mathfrak{R}_p -Modul) von einem Element A_0 der Ordnung p^l erzeugt werden; das allgemeine Element ist $F(\sigma) A_0$, wobei $F(\sigma)$ alle Polynome eines Grades $< \lambda$ mit Koeffizienten mod p^l bedeutet. In diesem Falle kann immer $H = 0$ gewählt werden. — Für $k = 1$ werden die direkt unzerlegbaren

\mathfrak{R}_p -Moduln $\mathfrak{A}^{(p)}$ im allgemeinen nicht mehr von einem Element erzeugt. Neben $\varphi_r(x)$ muß dann noch $\pi(x) = (x^n - 1)/(x^m - 1)$ betrachtet werden; auch $\pi(\sigma)$ ist ein nilpotenter Operator. Nunmehr muß eine recht komplizierte Konstruktion („offene“ und „geschlossene φ - π -Ketten“) von gewissen durch Systeme ganzer Zahlen (die Invarianten) charakterisierten \mathfrak{R}_p -Moduln ein vollständiges System direkt unzerlegbarer Operator-Gruppen liefern, und auch die Bestimmung einer kanonischen Form für H wird kompliziert. Es ist hervorzuheben, daß diese Konstruktionen im Falle einer p -Gruppe \mathfrak{G} sofort die Klasse (= Länge der absteigenden Zentralreihe) von \mathfrak{G} zu bestimmen gestatten und sofort zeigen, ob \mathfrak{G} regulär im Sinne von Ph. Hall ist [Proc. London math. Soc., II. S. 36, 29—95 (1933); dies. Zbl. 7, 291]. Als Anwendungen werden Sätze über gewisse von L. Weisner [Bull. Amer. math. Soc. 31, 413—416 (1925)] und von L. Rédei (dies. Zbl. 35, 15) untersuchte Gruppen bewiesen.

W. Magnus (New Rochelle, N. Y.).

Makar, Ragy H.: On the analysis of the Kronecker product of irreducible representations of the symmetric group. Proc. Edinburgh math. Soc., II. S. 8, 133—137 (1949).

Jede irreduzible Matrixdarstellung $D(\lambda)$ der symmetrischen Gruppe \mathfrak{S}_n in n Ziffern wird bekanntlich durch die ihr zugeordnete Partition (λ) :

$$n = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \quad \text{mit} \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$$

völlig gekennzeichnet. Die Zerlegung des Kroneckerschen Produktes $D(\lambda) \times D(\mu)$ zweier irreduzibler Darstellungen in seine irreduziblen Bestandteile muß daher grundsätzlich allein aus den beiden Partitionen (λ) und (μ) gewonnen werden können, wenn auch eine allgemeine Formel bisher noch nicht aufgestellt werden konnte. Verf. gibt, mit Hilfe der S -functions (Schursche Charakteristiken) eine Zerlegung aller direkten Produkte $D(n-p, \lambda_2, \dots) \times D(\mu)$ mit $p = 1, 2, 3$ und beliebiger zweiter Partition (μ) . Specht (Erlangen).

Pic, Georges: Sur une équation fondamentale relative aux groupes finis de substitutions linéaires. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 1268—1270 (1949).

Ein Punkt $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ des $(n-1)$ -dimensionalen komplexen projektiven Raumes heißt Doppelpunkt (point double) der projektiven Transformation

$$\varrho z' = Az: \quad \varrho z'_k = \sum_{\lambda} a_{\lambda k} z_{\lambda} \quad (k, \lambda = 1, 2, \dots, n),$$

wenn die Gleichung $\varrho z = Az$ besteht; man bestimmt die Doppelpunkte durch die charakteristische Gleichung $|A - xE| = 0$. — Liegt eine endliche Gruppe \mathfrak{G} projektiver Transformationen von der Ordnung g vor, so entscheiden die Elementarteiler der Matrix $A - xE$ über die von den Doppelpunkten gebildeten Teilräume. Zwei Doppelpunkte z, z' heißen äquivalent, wenn es eine Transformation A der Gruppe \mathfrak{G} gibt, für die die Gleichung $\varrho z' = Az$ besteht. Es werden dabei die Doppelpunkte der Gruppe in Klassen äquivalenter Doppelpunkte eingeteilt. Ähnliche Transformationen in \mathfrak{G} haben äquivalente Doppelpunkte. — Die Transformationen G' der Gruppe \mathfrak{G} , die einen Doppelpunkt gemeinsam haben, bilden eine Untergruppe \mathfrak{G}' , die einer Gruppe \mathfrak{H} im $(n-2)$ -dimensionalen Raume homomorph ist. Die Ordnung der dem Einheitsselement in \mathfrak{H} entsprechenden Untergruppe von \mathfrak{G}' ist ein Teiler von $n-1$. Hieraus kann die Anzahl der einem Punkte z äquivalenten Punkte abgezählt werden; ist g' die Ordnung der Gruppe \mathfrak{G}' , d der zugehörige Teiler von $n-1$, so besteht die Formel $\sum_p g/d_p g_p = n(g-1)$, wobei über die Klassen

äquivalenter Doppelpunkte zu summieren ist. Im Falle $n = 2$ erhält man die von F. Klein für binäre Transformationen angegebene Gleichung. Specht (Erlangen).

Peremans, W.: Existenz endlicher binärer projektiver Gruppen. Actual. Math. Centrum, Amsterdam, Rapport ZW 1949, 006, 13 S., (1949) [Holländisch].

Die Arbeit deckt sich weitgehend mit der Dissertation des Verf. (dies. Zbl. 33, 150).

Krull (Bonn).

Gelfand, I. M. und M. L. Cetlin: Endlichdimensionale Darstellungen einer Gruppe von unimodularen Matrizen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 71, 825—828 (1950) [Russisch].

Verff. gehen aus von der Lieschen Algebra K_n aller Matrizen n -ter Ordnung und betrachten ihre Darstellungen durch Matrizen N -ter Ordnung, worüber bisher zwar allgemeine Aussagen durch Cartan bekannt waren, welche aber nicht ausreichen, die sämtlichen nicht aufeinander zurückführbaren Darstellungen wirklich herzustellen, was indessen das Ziel der Verff. ist. Es wird zunächst $n = 2$ und 3 , dann beliebig angenommen. Dabei werden die Abbilder der Matrizen e_{ik} , welche nur an der Stelle $i k$ eine 1 , sonst lauter Nullen enthalten, durch E_{ik} bezeichnet. Wegen der sich ergebenden Bedingungen für diese Matrizen muß auf die Note selbst verwiesen werden.

Brandt (Halle).

Gelfand, I. M. und M. L. Cetlin: Endlichdimensionale Darstellungen einer Gruppe von orthogonalen Matrizen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 71, 1017—1020 (1950) [Russisch].

Im Anschluß an die vorstehend besprochene Note behandeln Verff. im besonderen die Darstellungen der orthogonalen Gruppe. Dabei wird die Algebra K_n auf alternierende Matrizen beschränkt. Mit a_{ik} wird die Matrix bezeichnet, die an der Stelle $i k$ das Element 1 , an der Stelle $k i$ das Element -1 und sonst lauter Nullen enthält. Die Abbilder der a_{ik} heißen I_{ik} , sie unterliegen zahlreichen Bedingungen, die hier nicht angegeben werden können. Sie reichen aber aus, um die Darstellungen der orthogonalen Gruppe wirklich herzustellen.

Brandt (Halle).

Gelfand, I. M. und M. A. Najmark (Neumark): Unitäre Darstellungen der Lorentzgruppe. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 11, 411—504 (1947) [Russisch].

Le but de cet article est d'étendre au groupe de Lorentz [plus exactement au groupe complexe unimodulaire à deux variables: $SL(2, C)$] les théorèmes fondamentaux de l'analyse harmonique; il contient des résultats complets et parfaitement explicites, obtenus par des méthodes presque toujours de caractère „intégral“; à ce titre, on peut considérer ce travail comme étant au moins aussi important que ceux, classiques, de Hurwitz, Schur, Frobenius, E. Cartan, H. Weyl sur les groupes finis, les groupes compacts, et les représentations de dimension finie des groupes semi-simples; en fait, le rapporteur serait tenté de croire que les difficultés que les AA. ont surmontées sont encore plus formidables que celles qu'on rencontre dans les travaux en question. Cela dit, voici les principaux résultats obtenus. § 1. Soit $G = SL(2, C)$; on définit des sous-groupes K, H, Z, Z, D en écrivant leurs éléments „génériques“:

$$k = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ 0 & k_{22} \end{pmatrix}; \quad h = \begin{pmatrix} h_{11} & 0 \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}; \quad z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix}; \quad \zeta = \begin{pmatrix} 1 & \zeta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \delta = \begin{pmatrix} \delta^{-1} & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$$

§ 2. Relations entre ces sous-groupes et G ; pour chacun de ces sous-groupes, on peut définir un espace (à gauche ou bien à droite) dans lequel opère G ; en négligeant dans ces espaces homogènes des variétés de dimension inférieure, on peut alors identifier canoniquement les espaces en question à des sous-groupes, à savoir: $K/D, K/Z, H/D, H/Z, G/K, G/Z, G/H, G/Z$ s'identifient respectivement à Z, D, Z, D, Z, K, Z, H . Par ailleurs, les classes d'éléments conjugués dans G sont étudiées; „presque“ tout $g \in G$ est de la forme $z^{-1} k z$. — § 3. Les résultats précédents permettent de former des relations entre les mesures de Haar des différents groupes considérés, relations qu'on obtient soit par calcul explicite soit par la théorie générale des espaces homogènes. Ces relations sont les suivantes [si Ω désigne un groupe d'élément générique ω , on note $d\mu_l(\omega)$ et $d\mu_r(\omega)$ ses mesures invariants à gauche et à droite; si ces deux mesures coïncident, on écrit simplement $d\mu(\omega)$]:

$$\int f(k) d\mu_l(k) = \iint f(\delta\zeta) d\mu(\delta) d\mu(\zeta); \quad \int f(k) d\mu_r(k) = \iint f(\zeta\delta) d\mu(\zeta) d\mu(\delta);$$

$$\int f(g) d\mu(g) = \iint f(kz) d\mu_l(k) d\mu(z) = \iint f(\zeta h) d\mu(\zeta) d\mu_r(h)$$

(naturellement il y a quelques autres relations analogues); on a aussi une formule qui permet de décomposer $d\mu(g)$ en mesures portées par les classes d'éléments conjugués, à savoir: soient $f(g)$ et $\varphi(k)$ définies sur G et K ; soient λ_g et $1/\lambda_g$ les valeurs propres de g ; soit k_g tel que $g = z^{-1} k_g z$; enfin soit $\beta(k) = d\mu_l(k)/d\mu_r(k)$; alors on a

$$\iint f(z^{-1} k z) \varphi(k) d\mu_l(k) d\mu(z) = \int f(g) \frac{\sum \varphi(k_g) \cdot \beta^{\frac{1}{2}}(k_g)}{|\lambda_g - \bar{\lambda}_g^{-1}|^2} d\mu(g)$$

le Σ étant étendu aux diverses représentations (en l'occurrence: deux) de g sous la forme $z^{-1} k_g z$. Cette dernière formule est analogue à celles que l'on connaît dans les groupes compacts classiques.

et qui sont fondamentales pour le calcul des caractères de ces groupes; les démonstrations des AA. sont du reste aussi du même genre. — § 4. *H* et *Z* étant assimilés à des espaces homogènes (cf. § 2) on écrit explicitement les formules de transformations; si $h \in H$ et $g \in G$, on note $h\bar{g}$ l'élément $h' \in H$ donné par $h'_{21} = g_{11}h_{21} + g_{21}h_{22}$, $h'_{22} = g_{12}h_{21} + g_{22}h_{22}$; ces transformations conservent la mesure $d\mu_r(h)$; de même pour $z \in Z$ et $g \in G$ on note $z\bar{g}$ l'élément $z' \in Z$ donné par $z' = (g_{11}z + g_{21})/(g_{12}z + g_{22})$; la mesure $d\mu(z)$ n'est pas invariante: $d\mu(z\bar{g}) = \beta^{-1}(zg) \cdot d\mu(z)$, où β est définie sur K comme plus haut et sur G par la condition $\beta(kz) = \beta(k)$. — § 5. Ces préliminaires achevés, nous entrons dans le sujet. Soit \mathfrak{H}_H l'espace de Hilbert des fonctions $f(h)$ qui sont de carré sommable pour $d\mu_r(h)$; pour $f \in \mathfrak{H}_H$ et $g \in G$, posons $U_g f(h) = f(h\bar{g})$; on obtient visiblement une représentation unitaire $g \rightarrow U_g$ de G dans cet espace de Hilbert; cette représentation n'est pas irréductible, car il est visible que les U_g permutent aux opérateurs de la forme $f(h) \rightarrow f(\delta h)$; si donc on veut la décomposer il faut faire une transformation de Fourier par rapport au sous-groupe D ; on est ainsi conduit, pour toute $f \in \mathfrak{H}_H$ et tout caractère (borné) χ de D , à poser

$$f_\chi(z) = \int f(\delta z) \beta^{\frac{1}{2}}(\delta) \chi(\delta) d\mu(\delta)$$

[la présence du $\beta^{\frac{1}{2}}$ provient du fait que les opérateurs $f(h) \rightarrow f(\delta h)$ ne sont pas unitaires; ce sont les opérateurs $f(h) \rightarrow \beta^{\frac{1}{2}}(\delta) f(\delta h)$ qui le sont]; en appliquant Lebesgue-Fubini et le théorème de Plancherel sur D , on voit que, pour presque tout χ , f_χ est de carré sommable sur Z , donc définit un élément de l'espace \mathfrak{H}_Z [espace L^2 construit sur $d\mu(z)$], et on a la formule $(f, g) = \int (f_\chi, g_\chi) d\mu(\chi)$ pour $f, g \in \mathfrak{H}_H$, (f_χ, g_χ) étant le produit scalaire dans \mathfrak{H}_Z et $d\mu(\chi)$ une mesure invariante sur le groupe dual de D . D'autre part, pour tout χ et toute $f \in \mathfrak{H}_Z$ posons $U_{\chi;g} f(z) = \beta^{-\frac{1}{2}}(zg) \chi(zg) f(z\bar{g})$ [on prolonge χ à G en posant $\chi(\zeta \delta z) = \chi(\delta)$]; on définit ainsi une représentation unitaire de G dans \mathfrak{H}_Z , dépendant du „paramètre“ χ ; pour $f, g \in \mathfrak{H}_H$ on vérifie aisément que l'on a la formule suivante, qui prouve que la représentation U_g se décompose en „somme continue“ des représentations $U_{\chi;g}$:

$$(U_s f, g) = \int (U_{\chi;s} f_\chi, g_\chi) d\mu(\chi) \quad (s \in G).$$

Les représentations $U_{\chi;g}$ s'écrivent explicitement comme suit: si $\chi(\delta) = |\lambda|^{n+i\varrho} \cdot \lambda^{-n}$ (n entier, ϱ réel quelconques), alors

$$U_{\chi;g} f(z) = |g_{12}z + g_{22}|^{n+i\varrho-2} \cdot (g_{12}z + g_{22})^{-n} \cdot f\left(\frac{g_{11}z + g_{21}}{g_{12}z + g_{22}}\right);$$

elles sont toutes irréductibles parce que, parmi les $U_{\chi;g}$ (χ donné) figurent en particulier les opérateurs de la forme $f(z) \rightarrow f(z + z_0)$ et $f(z) \rightarrow |\lambda|^{n+i\varrho-2} \cdot \lambda^{-n} f(z\lambda^{-2})$. On a donc obtenu une décomposition de la représentation initiale en représentations irréductibles. — § 6. Soit $g \rightarrow U_{\chi;g}$ une des représentations irréductibles construites ci-dessus. Pour une fonction $F(g)$ sommable sur G , on peut définir l'opérateur $U_{\chi;F} = \int U_{\chi;g} \cdot F(g) d\mu(g)$. Les formules du § 3 permettent de le former explicitement, comme suit: posons

$$K_{\chi;F}(z_1, z_2) = \int F(z_1^{-1} k z_2) \beta^{-\frac{1}{2}}(k) \chi(k) d\mu(k);$$

alors l'opérateur $U_{\chi;F}$ est défini dans \mathfrak{H}_Z par le „noyau“ précédent:

$$U_{\chi;F} f(z) = \int K_{\chi;F}(z, z') f(z') d\mu(z').$$

Si F est convenablement choisie (par exemple, si F est continue et nulle en dehors d'une partie compacte de G) l'opérateur $U_{\chi;F}$ est de trace finie, et donc du type d'Hilbert-Schmidt comme on le voit par des majorations ingénieuses; la trace de cet opérateur est donnée par

$$\text{Tr}(U_{\chi;F}) = \int F(g) \frac{\chi(\lambda_g) + \overline{\chi(\lambda_g)}}{|\lambda_g - \lambda_g^{-1}|^2} d\mu(g),$$

cette intégrale étant convergente dans les conditions indiquées. Il résulte aussitôt de là que les représentations associées à des caractères χ et χ' ne sont unitairement équivalentes que si ces caractères sont conjugués. — § 7. Ce § est destiné à décomposer la représentation „régulière“ de G [opérateurs $f(g) \rightarrow f(g_s)$ dans l'espace L^2 sur $d\mu(g)$] et à démontrer en même temps une formule du type de Plancherel. La démonstration exige des calculs compliqués — à savoir l'utilisation d'une représentation paramétrique peu naturelle et plusieurs transformations de Fourier relatives aux sous-groupes abéliens du § 1 — et le résultat obtenu est que: pour une

fonction $f(\chi)$ définie sur le groupe dual de D , posons $\int f(\chi) d\chi = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int f(n, \varrho) \cdot (n^2 + \varrho^2) d\varrho$ (on repère χ à l'aide des nombres n, ϱ); alors pour F, G continues nulles en dehors de parties compactes de G , on a

$$(F, G) = \int F(g) \overline{G(g)} d\mu(g) = (8\pi^2)^{-1} \cdot \int \text{Tr}(U_{\chi;F} \cdot U_{\chi;G}^*) \cdot d\chi;$$

c'est la formule de Plancherel sur G , et on voit que la représentation régulière de G se décompose suivant les $U_{\chi;g}$ (chaque $U_{\chi;g}$ intervenant du reste une infinité continue de fois dans la décomposition). Il est clair que ces résultats justifient ce que nous avons dit au début: on chercherait

en vain dans la littérature classique des formules aussi explicites. — § 8. A côté de la „série principale“ de représentations définie dans les §§ précédents, le groupe G possède encore d'autres représentations unitaires irréductibles (qui n'interviennent pas dans la décomposition de la représentation régulière, contrairement à ce qui se passe dans les cas classiques). Pour les construire, on prend sur \mathbb{Z} un „noyau“ hermitien positif $K(z, z')$, et on construit un espace de Hilbert en posant $(f, f') = \iint K(z, z') f(z) \overline{f'(z')} d\mu(z) d\mu(z')$; on cherche alors des représentations de G dans cet espace qui soient de la forme $U_g f(z) = \wedge(zg) f(gz)$; on obtient effectivement des représentations unitaires en prenant

$$K(z, z') = |z - z'|^{-2-\varrho}; \quad U_{\varrho}; \quad f(z) = |g_{12}z + g_{22}|^{-2-\varrho} \cdot f\left(\frac{g_{11}z + g_{21}}{g_{12}z + g_{22}}\right)$$

où ϱ est un nombre assujéti à vérifier $0 < \varrho < 2$. — Toutes ces représentations sont irréductibles, deux à deux distinctes et distinctes de celles de la série principale; les résultats du § 6 sont encore valables ici (les caractères de D qui interviennent maintenant sont non bornés: $\chi(\delta) = |\lambda|^\varrho$). — § 9. Ce §, qui termine l'article mais comprend 43 pages, est consacré essentiellement à prouver que: 1) il n'existe pas d'autres représentations unitaires irréductibles de G que celles qu'on a construites explicitement; 2) toute représentation unitaire de G se décompose en somme continue de représentations irréductibles; 3) corrélativement, toute fonction de type positif sur G s'exprime au moyen d'une intégrale portant sur des fonctions élémentaires de type positif (généralisation du théorème bien connu de S. Bochner). La méthode utilisée par les AA. nécessite des calculs malheureusement fort compliqués (mais il n'y a pas beaucoup d'espoir de les simplifier!); elle consiste essentiellement à montrer que toute représentation peut être définie par des fonctions dont le comportement vis-à-vis du groupe $U(2)$ (sous-groupe compact maximal de G) est particulièrement simple, puis à observer que, dans l'„algèbre de groupe“ (Gruppenring) de G ces fonctions forment des sous-algèbres commutatives; les représentations irréductibles sont alors associées aux idéaux maximaux de ces algèbres, et l'on obtient les résultats cherchés à l'aide des théorèmes de Gelfand sur les algèbres normées commutatives. — Bien entendu, les résultats plus récents de von Neumann, Mautner etc. . . permettent de montrer à priori, sans calcul explicite, que toute représentation est décomposable en représentations irréductibles; mais l'intérêt des résultats obtenus par les AA. est de déterminer explicitement les représentations irréductibles, et de fournir des procédés canoniques de décomposition; c'est dire que les problèmes posés et résolus dans cet article sont d'une difficulté bien plus grande que ceux de la théorie „abstraite“. Du point de vue de la précision des résultats et de la virtuosité des calculs, on peut considérer ce mémoire comme un modèle dont il est difficile de s'approcher; quant au style prodigieusement clair dans lequel il est rédigé, il constitue la meilleure réponse possible à ce que H. Weyl écrit dans la préface des „Classical Groups“: nous sommes en effet ici en présence d'un „brightly illuminated cell“ qui, pour étrange que cela puisse paraître, possède la même „profondeur de perspective“ qu'un „paysage ouvert sous un ciel clair“! R. Godement.

Dixmier, Jacques: Les moyennes invariantes dans les semi-groupes et leurs applications. Acta sci. math., Szeged 12A, L. Fejér et F. Riesz LXX annos natis dedic., 213—227 (1950).

Soit G un semi-groupe topologique (monoïde dans lequel la multiplication est fonction continue des deux variables), C l'espace de Banach des fonctions numériques continues et bornées dans G . Pour tout $s \in G$ et toute $f \in C$, ${}_s f$ (resp. f_s) désigne la fonction $x \mapsto f(sx)$ [resp. $x \mapsto f(xs)$]; une moyenne invariante à gauche (resp. à droite) sur G est une forme linéaire positive φ sur C telle que $\varphi({}_s f) = \varphi(f)$ [resp. $\varphi(f_s) = \varphi(f)$] pour tout $s \in G$, et $\varphi(1) = 1$. L'A. donne un critère nécessaire et suffisant pour qu'il existe sur G une moyenne invariante à gauche (resp. invariante à la fois à droite et à gauche). Il applique d'abord ce critère pour retrouver certains résultats de J. von Neumann et A. Markov sur l'existence de moyennes sur des groupes topologiques de type particulier (en particulier les groupes abéliens ou compacts). Il montre ensuite qu'un discret G engendré par une famille d'éléments s_i satisfaisant aux relations $s_i^{T_i} = e$, n'admet pas en général de moyenne invariante à gauche, les cas d'exception étant les groupes cycliques et le groupe engendré par deux éléments s_1, s_2 de carré e . Il donne enfin diverses applications de ces résultats; en particulier, généralisant un résultat de B. Sz. Nagy, il montre que si un groupe G possède une moyenne invariante à droite, toute représentation fortement continue et bornée de G par des opérateurs d'un espace de Hilbert est semblable à une représentation unitaire: il indique aussi, lorsque G est un semi-groupe discret de transformations d'un ensemble S , des relations entre moyennes invariantes sur G et mesures (simplement additives) invariantes par G et définies sur S . J. Dieudonné.

Montgomery, Deane: Connected two dimensional groups. Ann. math., Princeton, II. S. 51, 262—277 (1950).

L'A. étudie la structure des groupes localement compacts de dimension 2 [métriques séparables (cette hypothèse ne semblant pas indispensable)]. Soit G un tel groupe; G contient un sous-groupe local à un paramètre; on en déduit que G contient un sous-groupe local de Lie de dimension 2. Ceci permet de déterminer entièrement la structure de G lorsque G est connexe: si G n'est pas abélien et compact, G est le groupe affine (de \mathbf{R}), ou \mathbf{R}^2 , ou le produit de \mathbf{R} par un groupe compact connexe abélien de dimension 1 (c'est à dire limite projective de groupes isomorphes à T).
J. Braconnier (Lyon).

Verbände. Ringe:

Jordan, P.: Zur Axiomatik der Verknüpfungsbereiche. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg 16, 54—70 (1949).

Untersuchungen aus dem Bereich der „universellen Algebra“, ohne daß auf weitere Literatur aus diesem Gebiete eingegangen wird. Für beliebige Verknüpfungsbereiche (Körper, Gruppen, Verbände, ...) erklärt Verf. den Begriff der Grundaussage, die aus beliebig (auch unendlich) vielen einfachen „Termgleichungen“ (wie $a \cdot b + c = a^2 + b \cdot c$) durch (auch iterierte) konjunktive und disjunktive Verknüpfungen entstehen. Die wenn-so-Verbindungen von Grundaussagen liefern (nach etwaiger konjunktiver und disjunktiver Verknüpfung) die Folgenaussagen (z. B. die Aussage der Nullteilerfreiheit). In entsprechender Weise werden die Lösbarkeitsaussagen charakterisiert [Beispiel: Zu jedem a gibt es wenigstens ein x , so daß $(a \cap x) \cup b = b$ und $(a \cup x) \cap b = b$ für jedes b]. Die Menge aller Verknüpfungsbereiche, die einer festen Grundaussage genügen, heißt eine Gattung. Entsprechend liefern die Folgenaussagen die Arten und die Lösbarkeitsaussagen die Familien von Verknüpfungsbereichen. Eine Gattung enthält mit jedem Verknüpfungsbereich auch jeden Unterbereich und jedes homomorphe Bild: eine Art enthält einelementige Bereiche, und mit jedem Bereich auch jeden Unterbereich; schließlich enthält eine Familie mit jedem Bereich auch jedes homomorphe Bild. Als wichtiges Ergebnis beweist Verf., daß man diese Behauptungen auch umkehren kann. So gibt es z. B. zu einem bezüglich der Bildung von Unterbereichen und homomorphen Bildern abgeschlossenen Klasse von Bereichen stets eine Grundaussage, die diese Klasse charakterisiert. In diesem Rahmen diskutiert Verf. u. a. „Verbotsaxiome“ (Beispiel: Ein Verband ist modular, wenn er einen gewissen 5-elementigen Teilverband nicht enthält). — Sehr reichhaltige Sammlung von Beispielen. Kein Eingehen auf mengentheoretische oder logische Grundlagenfragen.

Hermes (Münster).

Jordan, P.: Zum Dedekindschen Axiom in der Theorie der Verbände. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg 16, 71—73 (1949).

Die Dedekindsche Modularbedingung [wenn $a \cap c = c$, so $a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup c$] kann man gleichwertig ersetzen durch die Gleichung $a \cap (b \cup (a \cap c)) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$, oder auch durch die selbstduale Gleichung: $(a \cup d) \cap (b \cup (a \cap d)) = (a \cap d) \cup (b \cap (a \cup d))$. Dies ist von Interesse im Zusammenhang mit der oben besprochenen Arbeit des Verf. — Als Anwendung verschärft Verf. ein Resultat von von Neumann (dies. Zbl. 14, 223), indem er beweist: Drei Elemente eines modularen Verbandes, für die gilt: $x(y + z) = xy + xz$, erzeugen einen distributiven Teilverband.

Hermes (Münster).

Jordan, Pascual: Über nichtkommutative Verbände. Arch. math., Karlsruhe 2, 56—59 (1949/50).

Zwei assoziative (nicht notwendig kommutative) Operationen \cap , \cup mit $a \cap (b \cup a) = (a \cap b) \cup a = a$ definieren einen „Schrägverband“. Als weitere Axiome

kann man fordern: $(b \cup a) \cap a = a \cup (a \cap b) = a$; $a \cup b \cup a = b \cup a$, $a \cap b \cap a = a \cap b$. Diese Axiome gelten z. B. in der Menge der Nebengruppen aller Untergruppen einer festen Gruppe (einschließlich der leeren Menge), wenn man $a \cap b$ als Durchschnitt nimmt und $a \cup b$ als die b umfassende Nebengruppe der durch die zu a und b gehörenden Untergruppen erzeugten Gruppe. Verf. diskutiert in diesen Bereichen die Abhängigkeit der Relationen $b \cup a = b$, $a \cap b = a$, $b \cap a = a$, $a \cup b = b$. — Es lassen sich auch modulare Schrägverbände definieren. *Hermes (Münster).*

Fuchs, Ladislav: The meet-decomposition of elements in lattice-ordered semi-groups. Acta sci. math., Szeged 12 A, L. Fejér et F. Riesz LXX annos natis dedic., 105—111 (1950).

Die Arbeit berührt sich eng mit einer älteren Veröffentlichung des Ref. [S. B. phys.-med. Soz. Erlangen 56, 47—63 (1925)]. Wie dort wird nicht ein Ring mit seinen Idealen betrachtet, sondern es wird ein Verband G untersucht, der die charakteristischen Eigenschaften des Verbandes aller Ideale eines Ringes besitzt. (Existenz einer kommutativen und assoziativen, allgemein ausführbaren Multiplikation, sowie einer \leq -Relation entsprechend der Unter-Oberideal-Beziehung.) Im Unterschied zu der älteren Arbeit kommt es dem Verf. nicht auf eine verbandstheoretische Ableitung der klassischen Noetherschen Zerlegungssätze an, sondern auf eine zweckmäßige Verallgemeinerung. Dazu setzt er die Existenz einer Φ -Funktion voraus, die jedem $x \in G$ eindeutig ein neues Element $\Phi(x) \geq x$ in G zuordnet, wobei $\Phi(\Phi(x)) = \Phi(x)$ gilt und die Bedingung $\Phi(x \cap y) = \Phi(x) \cap \Phi(y)$ erfüllt ist. Er nennt dann ein Element p aus G „ Φ -prim“, wenn aus $a_1 \cdot a_2 \cdots a_k \geq p$ stets $a_i \geq \Phi(p)$ für mindestens ein i folgt. Darüber hinaus führt er den Begriff des Φ -primären Elements ein, wobei sorgfältig zu beachten ist, daß die Φ -primären Elemente eine Untermenge (und nicht, wie man nach dem Namen vielleicht erwarten könnte, eine Obermenge), der Gesamtheit aller Φ -primen Elemente darstellen. Für Durchschnittsdarstellungen durch Φ -prime oder Φ -primäre Elemente gelten formal dieselben Eindeutigkeitsätze wie für Durchschnittsdarstellungen durch Primärideale in Noetherschen Ringen. Frühere Untersuchungen des Verf. über primäre und quasiprimäre Ideale lassen sich in den neuen Rahmen einordnen.

Krull (Bonn).

Ribeiro, Hugo: „Lattices“ des groupes abéliens finis. Comment. math. Helvetici 23, 1—17 (1949).

Der Untergruppenverband einer endlichen Abelschen Gruppe \mathfrak{G} besitzt genau eine direkte Zerlegung, nämlich die als Vereinigung der Untergruppenverbände der Primärkomponenten von \mathfrak{G} . Man braucht daher nur noch die Untergruppenverbände der primären Gruppen zu untersuchen. Zu deren Charakterisierung führt Verf. den Begriff eines u -uniformen Verbandes L ein. Dies ist ein modularer Verband, für den gilt: Sind A, B, C beliebige verschiedene Elemente von L mit $\dim B - \dim A = 2$, so hat das Gleichungssystem $A = C \cap X$, $B = C \cup X$ 0 oder u Lösungen. Außerdem wird gefordert, daß jeder konvexe Teilverband, der eine projektive Geometrie ist, dosarguesch ist. Die 1-uniformen Verbände stimmen mit den distributiven Verbänden überein. Als Endergebnis der Untersuchung erhält Verf. den Satz: L ist isomorph zum Untergruppenverband einer primären abelschen Gruppe genau dann, wenn L ein Ideal ist eines Verbandes mit folgenden Eigenschaften: jedes Element, das kleiner ist als ein \cup -irreduzibles Element, ist selbst \cup -irreduzibel [dann ist dieses Element ein Zyklus im Sinne von Baer, Trans. Amer. math. Soc. 52, 286 (1942)], alle maximalen Zyklen haben die gleiche Dimension, der Verband ist p -uniform (p ist Primzahl), und die Anzahl der oberen Nachbarn eines Elementes ist nicht größer als die Zahl der Atome. — Der Untergruppenverband einer endlichen Abelschen Gruppe \mathfrak{G} charakterisiert \mathfrak{G} genau dann, wenn keiner seiner irreduziblen Bestandteile 1-uniform ist.

Hermes (Münster).

Benado, Michaël: Le fondement axiomatique du théorème Jordan-Hölder relatif aux séries principales. C. r. Acad. Sci., Paris 229, 332—334 (1949).

This and a previous note [C. r. Acad. Sci., Paris 228, 529—531 (1949)] are generalizing results of O. Ore [Trans. Amer. math. Soc. 41, 226—275 (1937), Duke math. J. 3, 149—174 (1937), 4, 247—269 (1938); this Zbl. 16, 203, 351, 20, 348]. In the previous note, just referred to, the notions of α -normal, principal, and relative α -normal chains were elucidated. The present note makes use of two new notions: that of $\alpha\alpha$ -, and that of $x(\alpha + \beta)$ -chains; they enable the au. to develop a more complete theory of α -normal, β^i -normal, and seminormal varieties. — The lattice theoretical proof of the Jordan-Hölder theorem already given by Ore in his article of 1937 in the Trans. Amer. math. Soc., by means of a lattice theoretical proof of the Zassenhaus theorem, is generalized to: (1) $\alpha\alpha$ -sequences having common extremities (theorem 3); (2) to a pair of sequences having the same extremities, the first one being α -normal and the second $x(\alpha + \beta)$ with regard to the first (theorem 4).

C. Racine (Madras).

Klein-Barmen, Fritz: Zur Axiomatik der ausgeglichenen Gewebe. Math. Z., Berlin 53, 70—75 (1950).

Es werden längenendliche Gewebe betrachtet, und es wird der Zusammenhang zwischen den folgenden drei zusätzlichen Axiomen untersucht: A. Zu zwei Elementen a, b gibt es mindestens ein $c \supset a, c \supset b$, B. Es gibt ein f mit $f \supset a$ für alle a , C. Haben a und b einen gemeinsamen oberen Nachbar, so auch einen gemeinsamen oberen Nachbar. Aus C folgt A und aus C und B folgt die Brückenausgeglichenheit des Gewebes.

G. Köthe (Mainz).

Jenner, W. E.: The radical of a non-associative ring. Proc. Amer. math. Soc. 1, 348—351 (1950).

Der Begriff des Radikals für nicht-assoziative Systeme ist in letzter Zeit mehrfach untersucht worden. Grundlegend ist eine Arbeit von A. A. Albert [Bull. Amer. math. Soc. 48, 708—723 (1942)], in der das Radikal nicht-assoziativer Algebren untersucht wird. Für alternative Algebren wurden verschiedene Definitionen des Radikals von Dubisch, Roy, Perlis [Amer. J. Math. 70, 540—546 (1948); dies. Zbl. 37, 20] angegeben. In der vorliegenden Arbeit gibt Verf. eine Definition des Radikals für nicht-assoziative Ringe mit Minimalbedingung. Die Übersichtlichkeit der Darstellung und die Kürze der Beweise wird wesentlich durch zwei Gesichtspunkte ermöglicht: Neben den gegebenen nicht-assoziativen Ring stellt Verf. den von den Links- und Rechtsmultiplikatoren erzeugten assoziativen Transformatorenring. Damit wird erreicht, daß man die aus dem Assoziativen bekannten Verhältnisse für die vorliegende Fragestellung ausnutzen kann. Der Schwerpunkt der Untersuchungen besteht dann in einer geeigneten Aussonderung der absoluten Nullteiler. — \mathfrak{R} sei der gegebene nicht-assoziative Ring. Ein Element $a \neq 0$ aus \mathfrak{R} heißt absoluter Nullteiler, wenn $ax = xa = 0$ für alle $x \in \mathfrak{R}$ gilt. \mathfrak{R} kann als additive Gruppe aufgefaßt werden. Multiplikation (von rechts oder links) mit einem festen Ringelement erzeugt dann einen Endomorphismus dieser Gruppe. Die Elemente von \mathfrak{R} , aufgefaßt als Rechts- bzw. Linksmultiplikatoren, erzeugen einen assoziativen Ring \mathfrak{M} , den dem Ring \mathfrak{R} zugeordneten Transformatorenring. Genügt \mathfrak{M} der Minimalbedingung und besitzt \mathfrak{R} keine absoluten Nullteiler, so ist \mathfrak{R} dann und nur dann direkte Summe von einfachen Unterringen \mathfrak{R}_i , wenn \mathfrak{M} ebenfalls direkte Summe von einfachen Unterringen \mathfrak{M}_i ist. Die \mathfrak{R}_i bzw. \mathfrak{M}_i können dabei noch so gewählt werden, daß die \mathfrak{M}_i die Transformatorenringe der \mathfrak{R}_i sind. Ein nicht-assoziativer Ring heißt halbeinfach, wenn er direkte Summe von einfachen Ringen ist, keine absoluten Nullteiler enthält und wenn sein Transformatorenring die Minimalbedingung erfüllt. Verf. definiert nun eine aufsteigende Idealkette $\mathfrak{M}_i \subset \mathfrak{M}$ durch folgende Festsetzung: \mathfrak{M}_1 besteht aus der Null und allen absoluten Nullteilern von \mathfrak{R} . \mathfrak{M}_{i+1} besteht aus allen denjenigen $x \in \mathfrak{R}$ mit $ax \in \mathfrak{M}_i$, $xa \in \mathfrak{M}_i$ für alle $a \in \mathfrak{R}$. \mathfrak{M}_{i+1} kann dann auch charakterisiert werden als Menge aller $x \in \mathfrak{R}$, die, aufgefaßt sowohl als Rechts- wie auch als Linksmultiplikatoren aus \mathfrak{M} , Linksannullatoren von \mathfrak{M}^i sind. Erfüllt \mathfrak{M} die Minimalbedingung, so bricht die Kette der \mathfrak{M}_i bei einem endlichen Index l ab. Der Restklassenring $\mathfrak{R} - \mathfrak{M}_l$ besitzt keine absoluten Nullteiler. Ist umgekehrt \mathfrak{S} ein Ideal in \mathfrak{R} , dessen Restklassenring $\mathfrak{R} - \mathfrak{S}$ keine absoluten Nullteiler enthält, so gilt $\mathfrak{M}_l \subset \mathfrak{S}$. Ist $\mathfrak{R} - \mathfrak{S}$ sogar halbeinfach, so gilt $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{S}$, wo \mathfrak{M} das Radikal des (assoziativen) Transformatorenringes \mathfrak{M} bedeutet. Bildet man nun entsprechend zu dem Restklassenring $\mathfrak{R} - \mathfrak{R}\mathfrak{R}$ das Ideal \mathfrak{M}_l und bezeichnet man mit \mathfrak{M} das Urbild von \mathfrak{M}_l bei dem natürlichen Homomorphismus $\mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R} - \mathfrak{R}\mathfrak{R}$, so gilt: $\mathfrak{R} - \mathfrak{M}$ ist halbeinfach. Ist umgekehrt $\mathfrak{R} - \mathfrak{S}$ halbeinfach, so gilt $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{S}$. \mathfrak{M} heißt das Radikal von \mathfrak{R} . Kowalsky.

Jacobson, N.: Some remarks on one-sided inverses. Proc. Amer. math. Soc. 1, 352—355 (1950).

Verf. betrachtet einen Ring \mathfrak{A} mit Einselement, in dem es ein Paar u, v von Elementen gibt mit der Eigenschaft, daß v Rechtsinverses, aber nicht Linksinverses von u ist. Es gelten also die Beziehungen $uv = 1$, $vu \neq 1$. Die Elemente $e_{ij} = v^{i-1} u^{j-1} - v^i u^j$ genügen dann der Multiplikationstabelle $e_{ij} e_{rs} = \delta_{jr} e_{is}$. Setzt man $f_k = \sum_{i=1}^k e_{ii}$, so erhält man in $f_1 \mathfrak{A} \subset f_2 \mathfrak{A} \subset f_3 \mathfrak{A} \dots$ bzw. $(1 - f_1) \mathfrak{A} \supset (1 - f_2) \mathfrak{A} \supset (1 - f_3) \mathfrak{A} \dots$ auf- bzw. absteigende Ketten von Rechts-hauptidealen, die nicht abbrechen. Hieraus folgt als Umkehrung sofort ein Satz von Baer: Genügt ein Ring \mathfrak{A} mit Einselement der auf- bzw. absteigenden Kettenbedingung für (durch Idempotente erzeugte) Rechtshauptideale, so ist jedes Rechtsinverse gleichzeitig Linksinverses; d. h. aus $uv = 1$ folgt $vu = 1$. Ferner gewinnt man noch unmittelbar folgende Sätze: Ist wieder \mathfrak{A} ein Ring mit Einselement, der zwei Elemente u und v enthält mit $uv = 1$, $vu \neq 1$, so enthält \mathfrak{A} ein Rechtsideal, das direkte Summe von unendlich vielen \mathfrak{A} -isomorphen Rechtsidealen ist. Besitzt ein Element mehr als ein Rechtsinverses, so besitzt es sogar unendlich viele Rechtsinverse. Schließlich untersucht Verf. den Fall, daß \mathfrak{A} eine Algebra mit Einselement über dem kommutativen Körper Φ ist. $u_i, v_i \in \mathfrak{A}$ seien wiederum Elemente mit der Eigenschaft $u_i v_i = 1$, $v_i u_i \neq 1$. Unter Heranziehung der linearen Abbildungen eines Vektorraumes \mathfrak{R} über Φ mit abzählbarer Basis wird über die Struktur der Unteralgebren $\Phi[u_i, v_i]$ folgender Satz bewiesen: Die Algebren $\Phi[u_i, v_i]$ sind isomorph; sie sind primitive Algebren und besitzen minimale einseitige Ideale. Abschließend bemerkt Verf., daß alle Resultate bei entsprechenden Festsetzungen auch für Quasiinverse gelten.

Kowalsky (Erlangen).

Peremans, W.: Eine Bemerkung über freie Algebren. Actual. Math. Centrum, Amsterdam, Rapport ZW 1949, 015, 3 S. (1949) [Holländisch].

Es wird, insbesondere am Beispiel der Gruppen mit einer einzigen Erzeugenden, nachgewiesen, daß der Eindeutigkeitsbeweis, den Birkhoff in der zweiten Auflage seiner „Lattice theory“ für die in jeder Klasse von Algebren existierende freie Algebra erbracht hat, nur dann einwandfrei ist, wenn man sich auf solche Algebrenklassen beschränkt, die im Sinne von McKinsey und Tarski „durch Gleichungen definierbar sind“. (Birkhoff arbeitet tatsächlich in seinem Buch nur mit Klassen dieses Typs.)

Krull (Bonn).

Thompson, Frederick B.: A note on the unique factorization of abstract algebras. Bull. Amer. math. Soc. 55, 1137—1141 (1949).

Jónsson und Tarski (Direct decompositions of finite algebraic systems, Notre Dame math. Lectures, Nr. 5, Notre Dame, Ind. 1947) stellten die Frage, ob sich ein dort aufgestellter Zerlegungssatz (Satz 4.9) und verwandte Resultate ausdehnen lassen auf Klassen von Algebren, die sich von der betrachteten Klasse dadurch unterscheiden, daß zwar noch die Existenz eines für alle Operationen idempotenten Elementes z gefordert wird, aber nicht mehr, daß z Nullelement für die Addition ist. Verf. verneint diese Frage durch explizite Konstruktion eines Gegenbeispiels.

Hermes (Münster).

Albert, A. A.: A note on the exceptional Jordan algebra. Proc. nat. Acad. Sci. USA 36, 372—374 (1950).

Aus jeder assoziativen Algebra A über einem Körper mit Charakteristik $\neq 2$ läßt sich eine neue, nicht-assoziative Algebra A^+ herstellen, indem man $x \cdot y = \frac{1}{2}(xy + yx)$ als neues Produkt einführt. Verf. nennt eine Jordansche Algebra speziell, wenn sie sich in die einer assoziativen Algebra A zugeordnete Algebra A^+ einbetten läßt. Der bekannte Prototyp einer Jordanschen Algebra J besteht aus den dreireihigen Matrizen über der Cayleyschen Algebra C vom Range 8.

Von dieser aus quantenmechanischem Anlaß eingeführten Jordanschen Algebra J hatte Verf. früher [Ann. Math., Princeton, II. S. 35, 65—73 (1934); dies. Zbl. 8, 421; siehe dort auch das Ref. über die J einführende Arbeit] gezeigt, daß sie sich nicht in die einer assoziativen Algebra A endlichen Ranges zugeordnete Algebra A^+ einbetten läßt. Jetzt zeigt er, daß die Beschränkung auf endlichen Rang entbehrlich ist, d. h. daß J nicht speziell im obigen Sinne ist, indem er aus der gegenteiligen Annahme das Eingebettetsein der nicht-assoziativen Algebra C in der assoziativen A folgert.

Hasse (Hamburg).

Nakayama, Tadas: Construction and characterization of Galois algebras with given Galois group. Nagoya math. J. 1, 11—17 (1950).

Ref. [J. reine angew. Math. 187, 14—43 (1949)] hatte für galoissche Algebren A mit fester Galoisgruppe \mathcal{G} der Ordnung g über einem Körper Ω mit nicht in g aufgehender Charakteristik, anknüpfend an das Kronecker-Multiplikationsschema der absolut-irreduziblen Darstellungen von \mathcal{G} , den Begriff einer Faktorbasis nebst deren Faktorensystem definiert, die betrachteten Algebren A durch Klassen assoziierter Faktorensysteme \mathfrak{F} zu \mathcal{G} invariant gekennzeichnet, sowie die Kommutativität, Assoziativität, Halbeinfachheit von A durch explizite Formeln für \mathfrak{F} beschrieben. Verf. entwickelt dieselbe Theorie frei von der Charakteristikvoraussetzung, indem er die entsprechenden Betrachtungen mit den absolut-irreduziblen Darstellungen in einem Körper Ω von in g aufgehender Charakteristik (sog. modularen Darstellungen) von \mathcal{G} durchführt. Dabei kommt er zu ganz analogen, allerdings formal etwas komplizierteren Ergebnissen.

Hasse (Hamburg).

Amitsur, Shimshon: La représentation d'algèbres centrales simples. C. r. Acad. Sci., Paris 230, 902—904 (1950).

M_n sei ein Vektorraum der Dimension n über einem Körper K der Charakteristik 0. In K sei eine Ableitung definiert, deren Konstantenkörper C ist. Dann gilt: Jede einfache zentrale Algebra der Ordnung n^2 über C , zu der K ein Zerfällungskörper ist, ist isomorph dem Automorphismenring einer infinitesimalen Transformation aus M_n . Umgekehrt: K ist Zerfällungskörper jeder einfachen zentralen Algebra der Ordnung n^2 über C , welche dem Automorphismenring einer infinitesimalen Transformation aus M_n isomorph ist. Mit Hilfe der Bemerkung, daß zu jeder einfachen zentralen Algebra über C ein transzendenter Erweiterungskörper K von C als Zerfällungskörper dieser Algebra existiert und daß man in diesem K eine Ableitung definieren kann, deren Konstantenkörper C ist, folgt: Jede einfache zentrale Algebra von endlicher Ordnung über einem Körper der Charakteristik 0 ist isomorph dem Automorphismenring einer infinitesimalen Transformation eines passenden Vektorraumes.

Reichel (Tübingen).

Smiley, M. F.: A remark on a theorem of Marshall Hall. Proc. Amer. math. Soc. 1, 342—343 (1950).

Nach Marshall Hall [Trans. Amer. math. Soc. 54, 229—277 (1944)] charakterisiert die Identität $x(yz - zy)^2 = (yz - zy)^2 x$ Quaternionenalgebren über assoziativen nichtkommutativen Körpern. Verf. zeigt, daß dies auch für Cayley-Dickson-Algebren über alternativen nichtassoziativen Körpern gilt.

Reichel.

Zahlkörper. Funktionenkörper:

Cugiani, M.: I campi quadratici e l'algoritmo euclideo. II. Periodico Mat., IV. S. 28, 114—129 (1950).

This is the second part of an exposition of recent developments on the existence of an euclidean algorithm in quadratic fields. There is an extensive bibliography to which should be added: H. Chatland and H. Davenport, Canadian J. Math. 2, 289—296 (1950).

Cassels (Cambridge).

Kuroda, Sigeakatu: Über die Klassenzahlen algebraischer Zahlkörper. Nagoya math. J. 1, 1—10 (1950).

Sei K/κ ein relativ-abelscher Zahlkörper vom m -gliedrigen Typus (l, \dots, l) , wo l Primzahl, und durchlaufe K_i die $\frac{l^m-1}{l-1}$ zyklischen Teilkörper von K/κ vom Grade l . Bezeichne H, h, H_i die Klassenzahlen, R, r, R_i die Regulatoren, W, w, W_i die Einheitswurzelanzahlen von K, κ, K_i , und sei $Q = H R / W$, $q = h r / w$, $Q_i = H_i R_i / W_i$ gesetzt. Bezeichne ferner X, x, X_i diejenigen (zusammengesetzten) Charaktere der Galoisgruppe von K/κ , welche durch die identischen Darstellungen der K, κ, K_i zugeordneten Untergruppen induziert sind. Wie leicht zu sehen, besteht dann die Charakterrelation

$$(X - x) - \sum_i (X_i - x_i) = 0.$$

Die ihr entsprechende Relation zwischen den Zetafunktionen von K, κ, K_i liefert die Klassenzahlrelation

$$\frac{Q}{q} \left(\prod_i \frac{Q_i}{q} \right)^{-1} = 1, \text{ also } \frac{H}{h} \left(\prod_i \frac{H_i}{h} \right)^{-1} = \frac{\omega}{q} \text{ mit } q = \frac{R}{r} \left(\prod_i \frac{R_i}{r} \right)^{-1}, \omega = \frac{W}{w} \left(\prod_i \frac{W_i}{w} \right)^{-1}.$$

Nach Nehr Korn [Abh. math. Sem. Univ. Hamburg 9, 318—334 (1933); dies. Zbl. 1, 103] gilt $\frac{H'}{h'} \prod_i \left(\frac{H_i'}{h_i'} \right)^{-1} = 1$, wo die Striche bedeuten, daß alle Divisoren-

klassen von l -Potenzordnung in die Hauptklasse gerechnet werden. Daher ist der Quotient ω/q eine Potenz von l . Durch genaueres Eingehen auf die Einheitsgruppen E, e, E_i der Körper K, κ, K_i leitet Verf. für diesen Quotienten die folgende explizite Formel her:

$$\frac{\omega}{q} = \frac{[E : \prod_i E_i]}{l^n}$$

$$\text{mit } n = \frac{l^u-1}{l-1} - u + \frac{s+1}{2} \left[(m-1)(l^m-1) + \frac{l^m-1}{l-1} - m \right] - s \left(\frac{l^m-1}{l-1} - m \right),$$

und zwar unter der für $l=2$ einschränkenden Voraussetzung, daß K/κ relativ-reell ist (den reellen Konjugierten zu κ reelle Konjugierte zu K entsprechen). Dabei bedeutet s die Anzahl der unabhängigen Einheiten von κ und u die Anzahl der über κ unabhängigen Körper K_i , die durch l -te Wurzeln aus Einheiten von κ erzeugbar sind. Hasse (Hamburg).

Everett, C. J. and H. J. Ryser: Rational vector spaces. II. Duke math. J. 17, 135—145 (1950).

R sei der Körper der rationalen Zahlen, $R(\eta)$ eine endliche normale Erweiterung von R . Als J -Körper wird $R(\eta)$ bezeichnet, wenn die Spur $T(\alpha^* \beta)$, $\alpha, \beta \in R(\eta)$, α^* zu α konjugiert komplex, ein inneres Produkt im Sinn von Teil I (dies. Zbl. 35, 72) auf $R(\eta)$ erzeugt. Dies ist dann und nur dann der Fall, wenn der maximale reelle Teilkörper von $R(\eta)$ ebenfalls normal ist. $\|\alpha\| = \sqrt{T(\alpha^* \alpha)}$ ist eine Norm mit $\|\alpha \beta\| \leq \|\alpha\| \|\beta\|$, also eine Pseudobewertung im Sinn von Mahler. Die perfekte Hülle von $R(\eta)$ ist für reelle $R(\eta)$ die n -fache direkte Summe des Körpers der reellen Zahlen, für komplexe $R(\eta)$ die $n, 2$ -fache direkte Summe des Körpers der komplexen Zahlen. $R(\eta)$ heißt ein I -Körper, wenn er eine Orthonormalbasis bezüglich des inneren Produkts besitzt. Das direkte Produkt zweier I -Körper ist wieder ein I -Körper. $R(i)$ ist der einzige quadratische I -Körper. Jeder zyklische Körper ungeraden Grades ist ein I -Körper, die direkten Produkte dieser Körper mit $R(i)$ sind die einzigen zyklischen I -Körper geraden Grades. Es gibt biquadratische Körper mit der Vierergruppe und gleicher Diskriminante, von denen einer I -Körper ist, der andere nicht. Die Kreisteilungskörper C_m sind J -Körper. p, r, s seien verschiedene Primzahlen. C_{p^n} ist nur für $p=2$ I -Körper, C_m mit $m = r^{n_1} s^{n_2}$, r, s ungerade, ist dann und nur dann I -Körper, wenn $(r/s) = (s/r) = 1$ ist (Legendresymbol). Ist

m ungerade und hat es wenigstens 3 verschiedene Primfaktoren, so ist C_m ein I -Körper. Ist m gerade, so ist C_m dann und nur dann ein I -Körper, wenn $m \neq 4p^n$, $n \geq 1$ und $p \equiv 3 \pmod{4}$ ist. Anwendungen auf abelsche Erweiterungen.

G. Köthe (Mainz).

Linnik, Ju. V.: Elementarer Beweis eines Siegelschen Satzes auf Grund eines Verfahrens von I. M. Vinogradov. (Mit einem Anhang: ein kurzer analytischer Beweis.) *Izvestija Akad. Nauk SSSR., Ser. mat.* 14, 327—342 (1950) [Russisch].

Aus den Untersuchungen von Gauß und Dirichlet über die Klassenzahlen der binären quadratischen Formen ergeben sich die beiden Grenzwerte

$$\lim_{D \rightarrow \infty} \frac{h(-D)}{\ln D} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{D \rightarrow \infty} \frac{R_D + h(D)}{\ln D} = \frac{1}{2}.$$

Dabei bezeichnet D eine positive und $-D$ eine negative Stammdiskriminante und R_D den Regulator für den durch \sqrt{D} bestimmten Zahlkörper. Für diese Formeln, die vom Verf. als Satz von Siegel bezeichnet werden, wird ein neuer Beweis gegeben, der mit Abschätzungsmethoden bei willkürlichen Konstanten arbeitet und infolgedessen für einen Zahlentheoretiker wenig Anziehendes hat. Brandt (Halle).

● Weil, André: Variétés abéliennes et courbes algébriques. (Actual. sci. industr. Nr. 1064. Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg, 1946, VIII.) Paris: Hermann & Cie. 1948. 163 p.

Diese Schrift ist eine Fortsetzung der Arbeit des Verf.: „Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en deduisent“ (dies. Zbl. 36, 160, zitiert mit C). Es sei A eine Mannigfaltigkeit. Wenn die Punkte von A derart paarweise miteinander verknüpft werden können, daß sie eine Gruppe bilden, und wenn sich die Gruppenoperationen in gewisser Weise an die algebraisch-geometrische Struktur von A anpassen, so wird A eine Gruppenmannigfaltigkeit genannt. Ist A außerdem vollständig (complète), so heißt A abelsch; es wird gezeigt, daß dann die Gruppe der Punkte von A kommutativ ist. Die vorliegende Arbeit untersucht diese abelschen Mannigfaltigkeiten A . — Zunächst werden Funktionen auf einer Mannigfaltigkeit, mit Werten aus einer anderen Mannigfaltigkeit, im Sinne der algebraischen Geometrie erklärt. Sind beide Mannigfaltigkeiten A, B abelsch, so ist jede Funktion von A mit Werten aus B , bis auf eine (additive) Konstante ein Homomorphismus der (additiven) Gruppe der Punkte von A in die Gruppe der Punkte von B . Solche Funktionen heißen die Homomorphismen von A in B ; sie bilden einen Modul $\mathfrak{H}(A, B)$, der im Falle $A = B$ sogar ein Ring $\mathfrak{a}(A) = \mathfrak{H}(A, A)$ ist. Die folgenden Resultate, die wir nur für die Endomorphismenringe $\mathfrak{a}(A)$ referieren, werden vom Verf. in entsprechender Verallgemeinerung meist sogar für die Moduln $\mathfrak{H}(A, B)$ bewiesen. Für die Elemente λ aus $\mathfrak{a}(A)$ wird eine ganzzahlige, multiplikative Funktion $v(\lambda)$ erklärt. Ist $v(\lambda) \neq 0$, so ist $v(\lambda)$ das Produkt zweier multiplikativer Funktionen $v_s(\lambda)$ und $v_i(\lambda)$, und der separable Faktor $v_s(\lambda)$ ist gleich der Anzahl der Punkte t von A mit $\lambda t = 0$. Für die natürlichen Vielfachen $a \cdot \delta$ des Einselements δ von $\mathfrak{a}(A)$ ist $v(a \cdot \delta) > 0$; genauer: $v(a \cdot \delta) = a^{2n}$, wenn n die Dimension von A bezeichnet. Es folgt, daß $\mathfrak{a}(A)$ die Charakteristik Null besitzt, also zu einem Ring $\mathfrak{a}_0(A)$ über dem Körper \mathbb{Q} der Rationalzahlen erweitert werden kann. Besitzt A keine echten abelschen Untermannigfaltigkeiten, so heißt A einfach; dann ist $\mathfrak{a}_0(A)$ ein Schiefkörper. Im allgemeinen Falle gibt es in A einfache abelsche Untermannigfaltigkeiten A_1, \dots, A_h derart, daß A zum direkten Produkt $A' = A_1 \times \dots \times A_h$ isogen ist (das heißt, es gibt einen Homomorphismus von A auf A' und einen von A' auf A). Isogene Mannigfaltigkeiten besitzen isomorphe Endomorphismenringe. Es ergibt sich, daß $\mathfrak{a}_0(A)$ die direkte Summe von vollen Matrizenringen über Schiefkörpern $\mathfrak{a}_0(A_i)$ ist, wobei die A_i ein maximales System nicht isogener Mannigfaltigkeiten der Reihe A_1, \dots, A_h durchlaufen. Ist l eine von der Charakteristik des Grundkörpers verschiedene Primzahl, so ist die Gruppe g_l der Punkte von A mit

l -Potenzordnung ein direktes Produkt von $2n$ Gruppen, deren jede den Typus der additiven Gruppe der l -adischen Zahlen modulo 1 besitzt. Es wird eine Darstellung $\lambda \rightarrow M_l(\lambda)$ von $\mathfrak{a}(A)$ durch Matrizen $2n$ -ten Grades mit ganzen l -adischen Koeffizienten konstruiert. Mit Hilfe dieser Darstellung wird gezeigt, daß im Falle einer einfachen abelschen Mannigfaltigkeit A der Ring $\mathfrak{a}(A)$ eine endliche Basis über dem Bereich der ganzen Zahlen besitzt; daher ist $\mathfrak{a}_0(A)$ von endlichem Range über dem rationalen Zahlkörper \mathbb{Q} . Dies Resultat überträgt sich vermöge der obigen direkten Summendarstellung von $\mathfrak{a}_0(A)$ auf den Fall einer allgemeinen abelschen Mannigfaltigkeit; $\mathfrak{a}_0(A)$ ist also stets eine halbeinfache Algebra. Die Determinante der Darstellung $M_l(\lambda)$ ist gerade gleich $\nu(\lambda)$; die Spur $\sigma(\lambda)$ von $M_l(\lambda)$ ist rational und hängt nicht von l ab. Es gibt einen involutorischen Antiautomorphismus $\lambda \rightarrow \lambda'$ von $\mathfrak{a}_0(A)$, und es ist $\sigma(\lambda\lambda') > 0$ für $\lambda \neq 0$. Dies Ergebnis gestattet nach einer Bemerkung des Verf. die Anwendung der Methoden der Theorie der Riemannschen Matrizen auf den Ring $\mathfrak{a}_0(A)$. — Die Arbeit enthält eine Vielzahl von weiteren bemerkenswerten Sätzen über abelsche Mannigfaltigkeiten, insbesondere über die Struktur ihrer Divisorenklassengruppen. Das wichtigste Ergebnis ist jedoch die Tatsache, daß die allgemeine Theorie der abelschen Mannigfaltigkeiten für das Studium der algebraischen Kurven nutzbar gemacht wird. Jeder vollständigen Kurve Γ ohne mehrfache Punkte vom Geschlechte g wird eine abelsche Mannigfaltigkeit $J(\Gamma)$ der Dimension g zugeordnet; die Jacobische Mannigfaltigkeit von Γ . Die Gruppe der Punkte von $J(\Gamma)$ wird in invarianter Weise isomorph auf die Gruppe der Divisorenklassen vom Grade Null von Γ bezogen. Der Ring der Endomorphismen von $J(\Gamma)$ kann mit dem Ringe \mathfrak{A} der Korrespondenzenklassen von Γ identifiziert werden; dabei geht $\sigma(\lambda)$ in die (in C untersuchte) Funktion $\sigma(\xi)$ von \mathfrak{A} über. Verf. erhält so die hauptsächlichsten Ergebnisse aus C wieder. Darüber hinaus ergeben sich insbesondere die in C offen gebliebenen Tatsachen, daß \mathfrak{A}_0 halbeinfach und $\sigma(\xi)$ die Spur einer Darstellung von \mathfrak{A} ist. Es ist jedoch nicht so, daß die Jacobischen lediglich einen Spezialfall der abelschen Mannigfaltigkeiten bilden. Vielmehr stellen die ersteren auch ein wichtiges Hilfsmittel zur Untersuchung der letzteren dar, so daß in dieser Arbeit die Theorie der algebraischen Kurven und die der abelschen Mannigfaltigkeiten in steter Wechselwirkung miteinander stehen. — Die vom Verf. bei den Beweisen angewandten Methoden haben (wie auch in C) sein Buch „Foundations of Algebraic Geometry“ (Amer. math. Soc. Colloq. Publ. vol. 29, New York 1946) zur Grundlage.

H. Hasse (Hamburg) — P. Roquette (Erlangen).

Abellanas, Pedro: *Théorie arithmétique des correspondances algebriques*. Rev. mat. Hisp.-Amer., IV. S. 9, 175—233 (1949).

Anknüpfend an die Zariskische Behandlung des birationalen Falles, wird eine arithmetische Begründung der Theorie der algebraischen Korrespondenzen gegeben. Eine algebraische Korrespondenz wird definiert durch ein bihomogenes Primideal im Ringe $\mathfrak{R} = K[x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_n]$ aller in 2 Variablenreihen x_i, y_k homogenen Formen über einem passenden Körper K . Sind V_a, V'_b die aufeinander bezogenen, irreduziblen Mannigfaltigkeiten von den Dimensionen a, b , so wird mit ξ_i bzw. η_k eine allgemeine Nullstelle von V_a bzw. V'_b bezeichnet, und es werden die Körper $\Sigma^* = K(\xi_i; \eta_k)$, $\Sigma = K(\xi_i)$, $\Sigma' = K(\eta_k)$ sowie die Ringe $P^* = K[\xi_i, \eta_k]$, $P = K[\xi_i]$, $P' = K[\eta_k]$ gebildet. Gelöst werden im wesentlichen die folgenden Aufgaben: a) Definition der Transformierten W'_i ($i = 1, \dots, s$) in V'_b zu einer Untermannigfaltigkeit W von V_a . b) Festsetzung, wann W hinsichtlich einer bestimmten Transformierten W'_i als fundamental anzusehen ist. c) Für den regulären Fall, in dem (kurz, wenn auch nicht ganz korrekt gesagt), weder W hinsichtlich W'_i noch W'_i hinsichtlich W fundamental ist, Vergleich der Dimensionen von W und W'_i . — Zu a): Die Untermannigfaltigkeiten W bzw. W' von V bzw. V' mit den definierenden Primidealen \mathfrak{p} bzw. \mathfrak{p}' in P bzw. P' werden nach dem Vorbild von Zariski homolog genannt, wenn in Σ^* ein Bewertungsring \mathfrak{B}^* mit dem maximalen Primideal \mathfrak{m}^* existiert.

derart, daß $m^* \cap P = p$, $m^* \cap P' = p'$ wird. Auf Grund einer Reihe von bewertungstheoretischen Hilfssätzen, die im 1. Hauptteil der Arbeit abgeleitet werden, zeigt man dann leicht: Es sei W mit dem definierenden Primideal p in P gegeben, p_1^*, \dots, p_g^* seien diejenigen minimalen Primoberideale von $p \cdot P^*$, die der Gleichung $p_i^* \cap P = p$ genügen, W_i^* sei die durch $p_i' = p_i^* \cap P'$ definierte Untermannigfaltigkeit von V_b' . Dann sind $\alpha)$ alle W_i' zu W homolog, und es ist $\beta)$ jede zu W homologe Untermannigfaltigkeit von V_b' Untermannigfaltigkeit eines W_i' . Man ist daher berechtigt, die Vereinigungsmannigfaltigkeit $W_1' \cup \dots \cup W_g'$ als die Gesamttransformierte, die einzelnen W_i' als die irreduziblen Transformaten von W zu bezeichnen. — Zu b). Haben p_i und p_i^* dieselbe Bedeutung wie in a), so zeigt man leicht, daß für jedes i der Transzendenzgrad t_i des Restklassenrings P^*/p_i^* über dem Restklassenring P/p der Ungleichung $t_i \geq a + 1$ genügt. Es ist dann und nur dann W als fundamental hinsichtlich der irreduziblen Transformaten W_i' anzusehen, wenn $t_i > a + 1$ wird. — Zu c). Haben p , p_i^* , p_i' dieselbe Bedeutung wie in a) und b), so ist jedenfalls $p_i^* \supset p_i' \cdot P^*$, und man hat daher 2 Möglichkeiten: $\alpha)$ p_i^* ist minimales Primoberideal von $p_i' \cdot P^*$; in diesem Falle wird $d_i' = d + (a - b)$, falls d_i' bzw. d die Dimension von W_i' bzw. W bedeutet. $\beta)$ Es gibt mindestens ein minimales Primoberideal $p^{*'} \subset p_i^*$ von $p_i' \cdot P^*$ mit $p^{*'} \subset p_i^*$. Setzt man dann $p_1 = p^{*' \cap P}$ und bezeichnet man mit d_1 die Dimension der durch p_1 definierten Untermannigfaltigkeit von V_a , so wird $d + (a - b) < d_i' \leq d_1 + (a - b)$. — Bei der Herleitung der unter a), b), c) besprochenen Hauptsätze spielt eine Parameterdarstellung der gegebenen algebraischen Korrespondenz eine wichtige Hilfsrolle. Sie wird geliefert durch ein algebraisches Gleichungssystem

$$(1) \quad \eta_k^{e_k} + \sum_{l=1}^{g_k} c_i^{(k)}(\sigma_0, \dots, \sigma_a) \cdot \eta_k^{e_k - l} = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n),$$

bei dem die σ_0 passend normierte, über Σ algebraisch unabhängige Linearformen in η_0, \dots, η_n mit Koeffizienten aus Σ bedeuten, und $c_i^{(k)}(\sigma_0, \dots, \sigma_a)$ jeweils eine Form k -ten Grades in $\sigma_0, \dots, \sigma_a$ über P darstellt. Allerdings ist, analog wie im birationalen Fall, (1) nicht völlig äquivalent mit der Darstellung der gegebenen Korrespondenz durch ein bihomogenes Primideal. Aber die bewertungstheoretische Konzeption der Homologie gestattet es — wieder genau wie im Birationalen —, diese Schwierigkeit zu überwinden. Was die technischen Vorteile der Darstellung (1) und die ausgezeichneten arithmetischen Eigenschaften des Ringpaares $P^*(\sigma_0, \dots, \sigma_a)$, $P(\sigma_0, \dots, \sigma_a)$ angeht, so sei auf die Einleitung der besprochenen Arbeit verwiesen. — Hinsichtlich der im ersten Teile abgeleiteten bewertungstheoretischen Hilfssätze sei hier nur kurz bemerkt, daß sie verhältnismäßig elementaren Charakter haben und sich auf Bewertungen in homogenen und bihomogenen Körpern, ihre Ausdehnungen auf Oberkörper und ihre Konzentrationen in Unterkörper beziehen. *Krull*.

Zariski, Osear: A simple analytical proof of a fundamental property of birational transformations. Proc. nat. Acad. Sci. USA 35, 62—66 (1949).

Verf. gibt einen einfachen Beweis für ein Haupttheorem seiner „general theory of birational correspondences“ (s. Trans. Amer. math. Soc. 53, 490—542 (1943), insb. p. 522; diese Arbeit wird durch Z. angedeutet). Der erste Teil der vorliegenden Arbeit bleibt ganz im Rahmen der Theorie der Stellenringe. v sei ein Stellenring ohne Nullteiler, m das maximale Ideal von v , v eine Bewertung des Quotientenkörpers von v vom Range 1 mit dem Bewertungsring R und dem zugehörigen maximalen Primideal \mathfrak{P} von R , und es sei: $v \subset R$ und $m = \mathfrak{P} \cap v$. v/m kann dann als Unterkörper von R/\mathfrak{P} aufgefaßt werden. Der Transzendenzgrad von R/\mathfrak{P} über v/m heiße die v -Dimension von v . Unter diesen Voraussetzungen zeigt Verf.: 1. Wenn v die Dimension r hat, dann ist die v -Dimension von v höchstens $r - 1$. 2. Wenn v die Dimension r hat und analytisch irreduzibel ist (s. Verf., dies. Zbl. 37, 227) und die v -Dimension von v $r - 1$ ist, dann ist v ein Unterraum von R , d. h. die

durch die Potenzen von n bestimmte α -Topologie stimmt mit der durch die \mathfrak{P} -adische R -Topologie in σ erzeugten Topologie überein. — Verf. wendet im zweiten Teil seiner Arbeit diese Resultate aus der Theorie der Stellenringe auf algebraische Mannigfaltigkeiten und birationale Abbildungen an und erhält u. a. folgendes: V, V' seien zwei durch T birational aufeinander bezogene algebraische Mannigfaltigkeiten über dem gemeinsamen Grundkörper k . P, P' seien zwei einander entsprechende Punkte (im weiteren Sinne) von V, V' , die über k gleiche Dimension haben, P' sei über k nicht Spezialisierung eines Punktes Q' von $T\{P\}$, der über k größere Dimension als P' hat. V sei analytisch irreduzibel in P und der Stellenring von P sei im Stellenring von P' enthalten. Dann gilt: $T\{P\}$ besteht aus endlich vielen Punkten, von denen je zwei über k isomorph sind. — Aus diesem Satz und zwei weiteren Sätzen des Verf. [s. Z., Theorem 8 (A) und dies. Zbl. 37, 227] folgt nach Verf. das Haupttheorem (s. Z. p. 522).

Hirzebruch (Erlangen).

Zahlentheorie:

Kaprekar, D. R.: Trisectible numbers of six digits. J. Univ. Bombay, II. S. 17, Nr. 5, 1—4 (1949).

Völlig elementare Zahlenspielerien mit eigener Terminologie. Beim Beweise einer Behauptung, die implizite vom Charakter „dann und nur dann“ ist, wird nur „dann“, aber nicht „nur dann“ gezeigt. Am Schluß muß $25 \cdot 10^{2n-2}$ statt $25n^2$ stehen.

Dueball (Berlin).

Xerodakis, G. Ph.: Über einige Fragen der unbestimmten Analysis. Bull. Soc. math. Grèce 24, 28—50 (1949) [Griechisch].

Unter einem pythagoreischen Dreieck verstehe man eine nicht-triviale Lösung von $x^2 + y^2 = z^2$ mit $x < y$ in rationalen Zahlen x, y, z . Verf. vergleicht einige Probleme über pythagoreische Dreiecke mit „Nebenbedingungen“:

(Frénicle): $x^2 + y^2 = z^2; y^2 - 2xy - x^2 = u^2$,

(Fermat) A: $x^2 + y^2 = z^2; y = u^2; y - x = v^2; z - x = w^2$,

B: $x^2 + y^2 = z^2; z = u^2; x + y = v^2$

und zeigt ihre gegenseitigen Beziehungen (unter zahlreichen historischen Anmerkungen). — Danach werden aus elementaren Quellen Lösungen verschiedener Aufgaben ähnlicher Richtung (z. B. pythagoreische Dreiecke mit gleichem Flächeninhalt) und diophantischer Gleichungen folgender Typen

$$x^4 + y^4 + z^4 = X^4 + Y^4 + Z^4; x^4 + y^4 + a^2 z^4 = X^4 + Y^4 + a^2 Z^4;$$

$$a x^4 + b x^2 y^2 + c y^4 = dz^2;$$

$$x^3 - 2y^3 + 3z^3 = u^3; x^3 + 2y^3 + 2z^3 = u^3; x^3 + y^3 + 2z^3 = u^3$$

angegeben.

Specht (Erlangen).

Wijngaarden, A. van: A table of partitions into two squares with an application to rational triangles. Proc. Akad. Wet., Amsterdam 53, 869—881; Indag. math., Amsterdam 12, 313—325 (1950).

Verf. gibt eine Tabelle aller Zerlegungen $n = p^2 + q^2$ ($0 < p \leq q$) für alle in dieser Gestalt zerlegbaren Zahlen $n \leq 10000$ (Umfang 10 Druckseiten). Die Tabelle wurde so berechnet, daß zunächst eine Tafel mit doppeltem Eingang für n als Funktion von p und q hergestellt und diese unter Einschaltung einiger Kontrollen nach wachsendem n umgeordnet wurde. — Unter Benutzung der Tabelle wird erstmalig festgestellt: Ordnet man die Dreiecke mit ganzzahligen Seiten lexikographisch (das Dreieck mit den Seiten $a \leq b \leq c$ geht dem mit den Seiten $A \leq B \leq C$ voran, wenn $c < C$ oder $c = C, b < B$ oder $c = C, b = B, a < A$ ist), so besitzt das erste Dreieck mit rationalzahligen seitenhalbierenden Transversalen die Seiten (68, 85, 87). Dies Dreieck selbst wurde bereits von L. Euler [Novi Comm. Acad. Petrop. 18, 171 (1773)] angegeben.

Stöhr (Göttingen).

Roberts, jr., Harry C.: Pythagorean triangles and the Tarry-Escott problem. Scripta math., New York 16, 132—133 (1950).

Gloden, A.: Impossibilités diophantiennes. Euclides, Madrid 9, 476 (1949).

Gloden, A.: Une extension des systèmes multigrades. Euclides, Madrid 10, 289—290 (1950).

Gloden, A.: Solution of the congruence $x^4 + 1 \equiv 0 \pmod{p^3}$. Scripta math., New York 16, 131—132 (1950).

Beeger, N. G. W. H.: On composite numbers n for which $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ for every a prime to n . Scripta math., New York 16, 133—135 (1950).

Jacobsthal, Ernst: Über einige Kongruenzen. I, II, III. Norske Vid. Selsk. Forhdl. 22, Nr. 15, 56—61; Nr. 22, 96—101; Nr. 23, 102—106 (1950).

Die Arbeit gibt eine systematische Untersuchung von Kongruenzen zwischen symmetrischen Funktionen von Elementen in einem reduzierten Restsystem bezüglich eines gegebenen Moduls. Viele bekannte zahlentheoretische Sätze sind Spezialfälle der vom Verf. hergeleiteten allgemeinen Resultate. Erwähnt sei das folgende Resultat: Es bezeichne f_r die r -te symmetrische Grundfunktion von x_1, x_2, \dots, x_n . Wenn die x_i diejenigen Zahlen der Reihe 1, 2, \dots , N bedeuten, die zu dem Teiler d von N teilerfremd sind, so ist für ungerades r jedes f_r durch N teilbar, und es gilt sogar die Kongruenz

$$f_r \equiv \frac{1}{2} (n - r + 1) N f_{r-1} \pmod{N^3},$$

wo $n = \varphi(d) \cdot N/d$ ist. Ferner gilt: Ist G ein ganzzahliges homogenes symmetrisches Polynom von ungeradem Grade von x_1, x_2, \dots, x_n , so besteht die Kongruenz

$$2G \equiv N \sum_{i=1}^n \frac{\partial G}{\partial x_i} \pmod{N^3}.$$

Für einen Primzahlmodul p (≥ 5) gilt z. B.: Ist G eine homogene ganzzahlige symmetrische Funktion von 1, 2, \dots , $p-1$ von ungeradem Grade r , $3 \leq r \leq p-2$, so ist G durch p^2 teilbar. — Eine von Frobenius angegebene Kongruenzformel für Bernoullische Zahlen (S.-B. Preuß. Akad. Wiss., Berlin 1910, 809—847) wird als falsch erwiesen und durch eine richtige Formel ersetzt. Nagell (Uppsala).

Kraitchik, Maurice: On the divisibility of factorials. Scripta math., New York 14, 24—26 (1948).

p^k sei die höchste in $n!$ enthaltene Potenz der Primzahl p . Dann ist $k = (n-s)/(p-1)$; dabei ist s die Quersumme von n im System der Zahl p . — Nur für 4, 5, 7 ist $n!$, $n < 1020$, ein Quadrat. Kein Beweis, sondern nur Zitat des Buches des Verf.: Recherches sur la théorie des nombres. Am Schluß gibt Verf. Tabellen für die Primzahlzerlegung von $n! \pm 1$, $n < 22$, für einzelne Faktoren von $n! \pm 1$, $n \leq 40$, für die Zerlegung von $P_n \pm 1$, $n \leq 47$ mit P_n gleich dem Produkt der Primzahlen, die n nicht übersteigen, sowie für einzelne Faktoren von $P_n \pm 1$, $n \leq 89$. Dueball (Berlin).

Papademetrios, I.: Über die Fermatschen Zahlen und die ganzen Zahlen des Euklid. Bull. Soc. math. Grèce 14, 103—110 und engl. Zusammenfassg. 110 (1949) [Griechisch].

Zu den Fermatschen Zahlen $2^x + 1$ die folgenden Bemerkungen: Sind p und $q = 2p + 1$ Primzahlen und ist q Teiler von $2^x + 1$, so ist q auch Teiler von $2^p + 1$. Sind p und $q = 4p + 1$ Primzahlen und ist q Teiler von $2^x + 1$, so ist q auch Teiler von $2^{2p} + 1$. — Es gibt keine ungeraden vollkommenen Zahlen der Gestalt $a^x, a^x b^y, a^x b^y c^z$. Specht (Erlangen).

Gut, Max: Eulersche Zahlen und großer Fermatscher Satz. Comment. math. Helvetici 24, 73—99 (1950).

Verf. betrachtet die Fermatsche Gleichung $X^{2l} + Y^{2l} = Z^{2l}$, wo der Exponent das Doppelte einer ungeraden Primzahl $l > 3$ ist, und zwar nur den Fall, daß die

ganzen teilerfremden Zahlen $X, Y, Z \equiv 0 \pmod{l}$ sind. Er leitet für diesen Fall notwendige Kongruenzbedingungen her, die zu den Kummer-Mirimanoffschen Kongruenzen für den entsprechenden Fall von $x^l + y^l = z^l$ analog sind, indem er die Kummersche und die Takagische explizite Reziprozitätsformel für das l -te Potenzrestsymbol vom l -ten Kreiskörper $\mathbf{P}(\zeta)$ auf den $4l$ -ten Kreiskörper $\mathbf{P}(i\zeta)$ verallgemeinert und damit zum Ausdruck bringt, daß $\frac{X + i\zeta Y}{X + iY}$ die l -te Potenz eines zu l primen Divisors von $\mathbf{P}(i\zeta)$ ist. So ergeben sich als notwendige Bedingungen für den Quotienten $t = X^2/Y^2 = x^2/y^2$ neben den bekannten Kummer-Mirimanoffschen Kongruenzen

$$B_{l-w} \sum_{m=1}^{l-1} (-1)^{m-1} m^{w-1} t^m \equiv 0 \quad (w = 3, \dots, l-1)$$

mit den Bernoullischen Zahlen B die analogen Kongruenzen

$$E_{l-1-w} \sum_{m=1}^l (-1)^{m-1} (2m-1)^{w-1} t^m \equiv 0 \quad (w = 2, \dots, l-1)$$

mit den Eulerschen Zahlen E . — Als Folgerung ergibt sich die Unmöglichkeit des betrachteten Falles, wenn eine der Eulerschen Zahlen $E_{l-3}, E_{l-5}, E_{l-7}, E_{l-11} \not\equiv 0 \pmod{l}$ ist.

Hasse (Hamburg).

⁴ Bellman, Richard: The Dirichlet divisor problem. Duke math. J. 14, 411—417 (1947).

Für das Restglied $A(x) = \sum_{n < x} d(n) - x \log x - (2C - 1)x$ beim Teilerproblem [$d(n)$ ist die Anzahl der Teiler von n ; C ist die Eulersche Konstante] beweist der Verf., daß

$$\int_1^T x^{-3/2} A^2(x) dx \sim c_1 \log T \quad (T \rightarrow \infty),$$

wo $c_1 = 0$ eine Konstante ist. Verf. bemerkt selbst, daß allgemeinere Resultate schon bewiesen wurden von A. Walfisz [J. reine angew. Math. 169, 111—130 (1933); dies. Zbl. 6, 253] und S. Chowla [Math. Z. 35, 279—299 (1932); dies. Zbl. 4, 102], die aber ganz andere Methoden benutzen. Die Methode des Verf. beruht auf einer Anwendung des Satzes von Plancherel. In derselben Weise beweist Verf. die Formel

$$\int_1^T x^{-3} A_2^2(x) dx \sim c \log T,$$

wo $A_2(x) = \sum_{n < x} q(n) - 3x^2 \pi^2$ (q ist die Eulersche Funktion). H. D. Kloosterman.

Bellman, Richard: On some divisor sums associated with diophantine equations. Quart. J. Math. (Oxford II. Ser.) 1, 136—146 (1950).

Verf. untersucht die Summen

$$S_3 = \sum_{n \leq N} d(n) d_3(n+l), \quad S_4 = \sum_{n \leq N} d(n) d_4(n+l),$$

wo $d(n)$ die Teilerfunktion, $d_3(n) = \sum_{x_1 x_2 x_3 = n} 1$, $d_4(n) = \sum_{x_1 x_2 x_3 x_4 = n} 1$, also S_3, S_4 die

Lösungszahlen von $x_1 x_2 x_3 = y_1 y_2 = l$ ($y_1 y_2 \leq N$) bzw. $x_1 x_2 x_3 x_4 = y_1 y_2 = l$ ($y_1 y_2 \leq N$) sind. Titchmarsh [Some problems in the analytic theory of numbers. Quart. J. Math. (Oxford Ser.) 13, 129—152 (1942)] hat sich bereits mit S_3 beschäftigt. Verf. zeigt: $S_3 \sim c_3(l) N \log^3 N$, $S_4 \sim c_4(l) N \log^4 N$. Bei der Durchführung des Beweises beschränkt sich der Verf. auf $l = 1$. Zunächst wird das Problem auf die Summen $T_3 = \sum_{n \leq N} d_3(kn+1)$, $T_4 = \sum_{n \leq N} d_4(kn+1)$ zurückgeführt, in deren asymptotischen Abschätzungen jetzt Fehlerterme bestimmt werden müssen, die von N

und k abhängen. Zunächst wird T_4 behandelt. Variiert $\chi(n)$ über die $q(k)$ Charaktere modulo k , so zeigt man leicht (Perronsche Summenformel)

$$T_4 = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\chi} \frac{1}{q(k)} \int_{(2)} \frac{L_{\chi}^4(s) (1 + Nk)^s}{s} ds,$$

wo (2) der Integrationsweg längs $2 + it$. So wird man auf die Abschätzung von

$M = \frac{1}{T} \int_0^T |L_{\chi}(\frac{1}{2} + it)|^4 dt$ geführt. Hier folgt der Verf. der Methode einer eigenen

Arbeit [The mean-value of $\zeta(s)^4$ on the critical line, Duke math. J. (im Druck)] und Titchmarsh [The mean-value of the zeta function on the critical line, Proc. London math. Soc., II. S. 27, 137—159 (1928)]. Dabei wird eine approximative

Funktionalgleichung für $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d(n) \chi(n) e^{-nx}$, eine Funktion, welche durch

Mellintransformation mit $\Gamma(s) L_{\chi}^2(s)$ zusammenhängt, hergeleitet. Dann kann gezeigt werden $M = O((\log k T)^3)$. Daraus folgt dann das Resultat in direkter Weise, deren Ausführung aber längere Rechnungen erforderlich macht. Hlawka (Wien).

Shapiro, Harold N.: On primes in arithmetic progressions. I, II. Ann. Math., Princeton, II. S. 52, 217—230, 231—243 (1950).

I. Verf. gibt einen Beweis für die Selbergsche Ungleichung (dies. Zbl. 36, 306)

$$(1) \quad \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv B(A)}} \log^2 p + \sum_{\substack{pq \leq x \\ pq \equiv B(A)}} \log p \log q = \frac{2}{\varphi(A)} x \log x + O(x)$$

(p und q durchlaufen nur Primzahlen; q ist die Eulersche Funktion). Aus dieser Formel hatte schon Selberg einen elementaren Beweis des Dirichletschen Satzes über das Vorhandensein unendlich vieler Primzahlen in arithmetischen Progressionen $An + B$, $(A, B) = 1$, hergeleitet, indem er nur reelle Charaktere mod A und nur endliche Summen benutzte. Verf. gibt ebenfalls einen elementaren Beweis des genannten Satzes (und zwar ohne Benutzung von Charakteren oder L -Reihen), indem er zuerst unter Betrachtung des Körpers der A -ten Einheitswurzeln die Formel

$$\sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv 1(A)}} \frac{\log p}{p} = \frac{1}{\varphi(A)} \log x + O(1)$$

beweist und hieraus unter Benutzung von (1) auf

$$\sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv B(A)}} \log^2 p \rightarrow \infty$$

schließt. Ohne Benutzung von algebraischen Zahlkörpern schließt er völlig elementar aus (1) erstens, daß zu gegebenem A mindestens die Hälfte der arithmetischen Progressionen $n \equiv B \pmod{A}$, $(A, B) = 1$, unendlich viele Primzahlen enthält, und zweitens, daß dies jedenfalls zutrifft im Falle, daß A Potenz einer ungeraden Primzahl und B quadratischer Nichtrest mod A ist.

II. Verf. gibt einen elementaren Beweis für die Ungleichung

$$(2) \quad \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv B(A)}} \frac{\log p}{p} = \frac{1}{\varphi(A)} \log x + O(1)$$

unter Benutzung von Charakteren mod A , aber ohne Benutzung von Dirichletschen Reihen und auch ohne Benutzung der in I erwähnten Selbergschen Ungleichung [in der dort erwähnten Arbeit beweist Selberg mit Benutzung dieser Ungleichung, daß die linke Seite in (2) $> C_A \log x$ ist]. Die einzigen im Beweis auftretenden unendlichen Reihen sind $\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)/n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) \log n/n$ (wo χ ein Nichthauptcharakter ist). Verf. zeigt aber, daß stattdessen auch endliche Summen

benutzt werden können, wobei der Beweis allerdings etwas komplizierter wird. Falls $\theta_B(x)$ gleich der Summe $\sum \log p$ [erstreckt über sämtliche Primzahlen $p \leq x$ mit $p \equiv B \pmod{A}$, wo $(A, B) = 1$] ist, so beweist Verf. weiter unter Benutzung der Selbergschen Ungleichung, daß $\liminf (\theta_B(x)/x)$ und $\limsup (\theta_B(x)/x)$ nicht von B abhängig sind und zusammen den Wert $2/\varphi(A)$ haben. Weil der Primzahlsatz für arithmetische Progressionen im Falle $B = 1$ eine Folge des Primidealsatzes ist, ist damit auch gezeigt, daß der Primzahlsatz für arithmetische Progressionen im allgemeinen Falle eine Folge des Primidealsatzes ist. *H. D. Kloosterman.*

Brigham, Nelson A.: A general asymptotic formula for partition functions. Proc. Amer. math. Soc. **1**, 182—191 (1950).

Verf. betrachtet die Koeffizienten $a(k)$ in der Entwicklung

$$g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-sn})^{\gamma(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} a(k) e^{-sk},$$

wo über die zahlentheoretische Funktion $\gamma(n)$ die Voraussetzung gemacht wird, daß sie ≥ 0 ist und $\sum_{n \leq x} \gamma(n) \sim K x^u \log^v x$, wo $K > 0$, $u > 0$. Er beweist, daß

$\log g(s) \sim K s^{-u} (\log s^{-1})^{-v} \Gamma(u+1) \zeta(u+1)$ falls $s \rightarrow 0$, $s > 0$. Durch Anwendung eines Tauberschen Satzes von Hardy und Ramanujan folgt hieraus

eine asymptotische Formel für $\log A(k)$, wo $A(k) = \sum_{n=0}^k a(n)$. Unter gewissen

Voraussetzungen über $\gamma(n)$ ist dieselbe asymptotische Formel auch für $\log a(k)$ richtig. Falls $\gamma(n) = 1$ für jedes n , ist $a(k)$ die Anzahl der Zerlegungen (Partitionen) von k in positive ganze Summanden. Im allgemeinen Falle sind diese mit Gewichten versehen. Verf. betrachtet die beiden Spezialfälle, daß die Summanden Primzahlen sind oder Werte $f(m)$ eines Polynoms f , das für ganze m ganze Werte annimmt. Im letzteren Falle können den m noch verschiedene Bedingungen auferlegt werden, z. B. prim zu sein oder quadratfrei oder eine Polygonalzahl. *H. D. Kloosterman.*

Corput, J. G. van der: Über eine Vermutung von de Polignac. Simon Stevin, wis. natuurrk. Tijdschr. **27**, 99—105 (1950) [Holländisch].

A. de Polignac hat 1849 die Vermutung ausgesprochen, daß sich jede ungerade Zahl n in der Gestalt $p + 2^k$ (p Primzahl) schreiben läßt. Es hat aber bereits Euler bedeutend früher gezeigt, daß diese Vermutung für 127 (Primzahl) und $959 = 7 \cdot 137$ nicht zutrifft. Es wäre nun aber z. B. denkbar, daß trotzdem diese Vermutung für fast alle n zutrifft. Verf. zeigt nun aber: Ist $N(x)$ die Anzahl der Fälle $\leq x$, für welche die Vermutung falsch ist, so gibt es eine positive Zahl a , so daß $N(x) > ax$ für alle genügend großen x ist. Zum Beweis wird $S = \sum f(n)$ herangezogen, wo sich die Summe über die $n \leq x$ erstreckt und $f(n)$ die Anzahl der Möglichkeiten ist, n in der Polynacschen Form zu schreiben. Dann ist $N \geq A - S$, wo A die Anzahl der ungeraden Zahlen $\leq x$ ist. Aus der Gestalt $S = \sum_p \sum_k 1$ (wo p alle Primzahlen $\leq x$ und k alle natürlichen Zahlen mit $2^k \leq x - p$ durchläuft) folgt durch Anwendung des Primzahlsatzes sofort die Abschätzung $N > \left(\frac{1}{2} - \frac{1+\delta}{\log 2}\right)x - 1$ ($\delta > 0$), welche aber wertlos ist. Durch interessante Verfeinerung dieser Überlegung gelingt es dem Verf., das gewünschte Resultat zu erzielen. *Hlawka (Wien).*

Sawyer, D. B.: A note on the product of two non-homogeneous linear forms. J. London math. Soc. **25**, 239—240 (1950).

Einfacher Beweis des Satzes: Es gibt ganze Zahlen x, y , so daß

$$-\frac{1}{4}\lambda A \leq (ax + by + p)(cx + dy + q) < A/4\lambda,$$

wobei $A = ad - bc > 0$; p, q beliebig reell und λ beliebig positiv.

Hofreiter (Wien).

Obrechhoff (Obreškov), N.: Über diophantische Approximationen von Linearformen für positive Werte der Veränderlichen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 73, 21—24 (1950) [Russisch].

The following result is proved: Let

$$\varphi_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ik}x_k \quad (1 \leq i \leq m)$$

be m linear forms with arbitrary real coefficients and n a positive integer. Then there exist k non-negative integers x_1, x_2, \dots, x_k and m integers y_1, y_2, \dots, y_m such that

$$x_1 \leq n, x_2 \leq n, \dots, x_k \leq n, \sum_{i=1}^k x_k > 0, |\varphi_i + y_i| \leq \frac{1}{(kn+1)^{1/m}} \quad (1 \leq i \leq m).$$

In the special case $m = 1$, the sign of equality holds if, and only if, φ_1 is congruent (mod 1) to $\frac{\lambda}{kn+1} \sum_{i=1}^k x_k$ where λ is an arbitrary positive integer prime to $kn+1$.

— In a further theorem, the result for $m = 1$ is generalized, but seemingly conditions $x_k \leq n_k$ have been omitted by mistake. *Mahler* (Manchester).

Chabauty, Claude et Elisabeth Lutz: Sur les approximations diophantiennes linéaires réelles. I. Problème homogène. C. r. Acad. Sci., Paris 231, 887—888 (1950).

The set of real linear forms $L_i = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{iq}x_q + u_i$ ($i = 1, \dots, p$; $p + q = n$) is free if there is no non-trivial polynomial relation with integer coefficients between the a_{ij} . If $\varphi(t)$ is a positive function of the positive variable t we write $L \prec \varphi$ to denote that for all sufficiently large t there are integers $x_1, \dots, x_q, u_1, \dots, u_p$ not all zero such that $\text{Max } |L_i| \leq \varphi(t)$, $\text{Max } |x_j| \leq t$. If $p < n/2$ and $\varphi(t)$ is any positive decreasing function or if $\frac{1}{2}n < p < n$ and $\varphi(t)$ increases monotonically to $+\infty$ then there is shown to exist a free set of forms with $L \prec \varphi$ or $L \prec \psi(t)t^{-q/(p-1)}$ respectively. — A set

$$L'_i = a'_{i1}x'_1 + \cdots + a'_{i q'}x'_{q'} + u'_i \quad (i = 1, \dots, p'; p' + q' = n')$$

is subordinate to L_i if there is a homogeneous linear substitution $x = x(x', u')$, $u = u(x', u')$ with integer coefficients such that the varieties defined by $L_i = 0$ and $L'_i = 0$ coincide. The set L_i is pure if no such L'_i exists with $p'/n' > p/n$. It is stated that if $p \leq 2(n-1)/3$ and φ is as above then there is a pure set L_i with $L \prec \varphi$.

Cassels (Cambridge).

Jarník, Vojtěch: Une remarque sur les approximations diophantiennes linéaires. Acta Sci. math., Szeged 12B, L. Fejér et F. Riesz LXX annos natis dedic., 82—86 (1950).

Es handelt sich um die näherungsweise Lösung der Gleichung

$$a_0 + a_1\theta_1 + a_2\theta_2 + \cdots + a_r\theta_r = 0 \quad \text{mit} \quad |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_r| > 0$$

in ganzen rationalen Zahlen a_1, a_2, \dots, a_r bei gegebenem System S reeller Zahlen $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r\}$. Um den Grad der Annäherung darzustellen, wird die für $t \geq 1$ definierte Funktion eingeführt: $\psi_S(t) = \psi(t) = \min |a_0 + a_1\theta_1 + \cdots + a_r\theta_r|$, wobei das Minimum über alle ganzzahligen a_i ($i = 1, 2, \dots, r$), die der Bedingung $0 < \max(|a_1|; \dots; |a_r|) \leq t$ genügen, zu bilden ist. Das System S heißt unabhängig, wenn für jedes $t \geq 1$ $\psi(t) > 0$ ist. Es gilt dann für jedes $t \geq 1$ die Ungleichung $t^r \psi(t) < 1$. man weiß jedoch, daß speziell für $r = 1$ bei irrationalem θ_1 der Grenzwert $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^r \psi(t)$ nicht existiert. Verf. beweist, daß das auch ganz all-

gemein für $r > 1$ zutrifft. Es wird nämlich gezeigt, daß bei $r \geq 1$ und $S = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r\}$ für $B = \limsup_{t \rightarrow +\infty} t^r \psi_S(t)$ und $A = \liminf_{t \rightarrow +\infty} t^r \psi_S(t)$ stets

$B > A$, genauer $(1) (B/A)^{2^{r+1}} \geq 2$ gilt. Weiterhin wird für ein unabhängiges System S im Falle $r = 2$ bewiesen: Ist $\varphi(t)$ eine stetige, für gegen unendlich wachsendes $t \geq 1$ monoton abnehmende Funktion mit $\lim_{t \rightarrow +\infty} t \varphi(t) = 0$, so gibt es, falls

$\psi_S(t) < \varphi(t)$ ist für jedes $t > T_0$, zu jedem T ein $t > T$, so daß $\psi_S(t) < \varphi(1/6t\varphi(t))$ ist. Hieraus erhält man für $\varphi(t) = kt^{-2}$ ($k > B$), daß man an die Stelle der Ungleichung (1) die für kleinere B genauere Ungleichung $A \leq 36B^3$ setzen kann. Für $\varphi(t) = t^{-\gamma}$ mit $1 < \gamma < \alpha$, falls man die obere Grenze der Zahlen γ , für die $\limsup_{t \rightarrow +\infty} t^\gamma \psi_S(t) < +\infty$ bzw. $\liminf_{t \rightarrow +\infty} t^\gamma \psi_S(t) < +\infty$ ist, mit α bzw. β bezeichnet, folgt, daß für ein System $S = (\theta_1, \theta_2)$ mit $2 < \alpha < \infty$ stets $\beta \geq \alpha(\alpha - 1) > \alpha$ gilt. Ein ähnlicher Satz wird für $r > 2$ angekündigt. *Heinhold* (München).

Davenport, H.: On a theorem of Khintchine. Proc. London math. Soc., II. S. 52, 65—80 (1950).

It has been shown by Khintchine [Rend. Circ. mat. Palermo 50, 170—195 (1926)] that, there is an absolute constant $\delta > 0$ with the following property: for any real number λ there exists at least one real number β such that $|\lambda x + \beta - y| > \delta/x$ for all integers $x > 0, y$. S. Fukasawa showed that an admissible value for δ is $\frac{1}{457}$ [Jap. J. Math. 4, 41—48 (1927)]. In the present paper it is shown that $\delta = \frac{1}{74.1\dots}$ is admissible. It is stated that Prasad has subsequently proved that $\delta = \frac{3}{32}$ is admissible [to appear in same Proceedings]. — The treatment depends on the expansion of α as a semi-regular continued fraction by the method of the nearest integer and is similar to those given by the author for related problems (this Zbl. 33, 157; 36, 163 and forthcoming papers). *Cassels* (Cambridge).

Mullender, P.: Simultaneous approximation. Ann. Math., Princeton, II. S. 52, 417—426 (1950).

A problem of simultaneous approximation is to find the best possible constants c, C with the following properties: (1) For all real α, β there are infinitely many sets of integers $x \neq 0, y, z$ such that

$$\left| \alpha - \frac{y}{x} \right| < \frac{c^{1/2}}{|x|^{3/2}}, \quad \left| \beta - \frac{z}{x} \right| < \frac{c^{1/2}}{|x|^{3/2}}.$$

(2) for all real λ, β there are infinitely many sets of integers x, y, z such that

$$X = \text{Max} (y, z) \geq 1: |\lambda y + \beta z - x| < \frac{C}{X^2}.$$

Here it is shown that (1), (2) are true if $c, C > A = \frac{2^7}{3^4 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{23}} = \frac{1}{2,400\dots}$. This

is the best result to date but presumably not best possible. It is known that both (1), (2) are false for $c, C < 1/\sqrt[4]{23}$. These results are corollaries of the general theorem that if $\varepsilon > 0$ is given and L_1, L_2, L_3 are real homogeneous linear forms in x, y, z of determinant Δ , and if $a > A$ then the inequality

$$|L_1| \text{Max} \{ |L_2|^2, |L_3|^2 \} < a|\Delta|$$

has an infinity of integer solutions x, y, z for which $\text{Max} \{ |L_2|, |L_3| \} < \varepsilon$ and also an infinity with $|L_1| < \varepsilon$. The proof depends on the critical determinant of the body $|x(y^2 + z^2)| \leq 1$ [Davenport: Proc. London math. Soc., II. S. 45, 98—125 (1939); this Zbl. 20, 293] and uses an idea of Mordell [J. London math. Soc. 16, 4—12 (1941); this Zbl. 28, 348]. *Cassels* (Cambridge).

Barnes, E. S.: Non-homogeneous binary quadratic forms. Quart. J. Math. (Oxford II. Ser.) 1, 199—210 (1950).

Let $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ be an indefinite quadratic form with real coefficients and discriminant $\Delta^2 = b^2 - 4ac$. Then it is required to find a number λ (depending possibly on f) such that for all real numbers x_0, y_0 there are x, y such that

$$(x, y) \equiv (x_0, y_0) \pmod{1}, \quad |f(x, y)| \leq \frac{1}{2}\lambda.$$

Minkowski has shown that $\lambda = \Delta$ is admissible and improvements for certain $f(x, y)$ have since been given [e. g. Heinhold. Math. Z. 44, 659—688 (1939); 45,

176—184 (1939); this Zbl. **20**, 6, 294; H. Davenport, Proc. Akad. Wet., Amsterdam **49**, 815—821 (1946); this Zbl. **29**, 18; J. W. S. Cassels, Proc. Cambridge phil. Soc. **44**, 145—154, 457—462 (1948); this Zbl. **30**, 19; **32**, 403]. In this paper it is shown that

$$\lambda = \text{Max } [|f(1, 0)|, |f(0, 1)|, \text{Min } \{|f(1, 1)|, |f(1, -1)|\}]$$

is admissible. This is simpler in form than the earlier estimates and implies those of Minkowski and Davenport. — As an immediate corollary it is verified that the Euclidean Algorithm holds in most of the real quadratic fields for which it is known to hold. An application is also made to the forms of the Markoff chain.

Cassels (Cambridge).

Cassels, J. W. S.: Some metrical theorems of diophantine approximation. II. J. London math. Soc. **25**, 180—184 (1950).

Es sei $f_1(\theta), f_2(\theta), \dots$ eine Folge differenzierbarer Funktionen in $[a, b]$, für die 1) $f'_n(\theta) > 0$, 2) $f'_n(\theta) \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$ bei festem θ , 3) $f'_n(\theta)$ monoton wachsend in θ bei festem n . Es sei weiter

$$F_N(\theta) = (f'_N(\theta))^{-1} \sum_{n \leq N} f'_n(\theta), \quad E_N = \int_a^b F_N(\theta) d\theta,$$

und $a_1, a_2, \dots, q_1, q_2, \dots$ zwei Folgen von Zahlen mit $0 \leq q_n \leq 1$. Dann wird folgender Satz bewiesen: I. Ist $\sum q_n$ konvergent, dann ist die Ungleichung

$$(1) \quad \{a_n + f_n(\theta)\} < \varphi_n$$

für fast alle θ nur für endlich viele n lösbar. II. Ist $\sum q_n$ divergent und, $\sum_{n \leq N} q_n = \Phi_N$ gesetzt,

$$\sum_{n \leq N} q_n E_n = o(\Phi_N^2), \quad \sum_{n \leq N} q_n \frac{n}{f'_n(a)} = o(\Phi_N^2),$$

dann hat (1) für fast alle θ unendlich viele Lösungen. Es ist II sicher erfüllt, wenn $\sum q_n$ divergiert und $\max_{\theta} F_N(\theta) = o(\Phi_N)$ für $N \rightarrow \infty$. Dieser Satz enthält Resultate von J. F. Koksma [Sur la théorie métrique des approximations diophantiques; Proc. Akad. Wet., Amsterdam **48**, 54—70 (1945)]. Für den Beweis genügt es, $a_n \equiv 0$ anzunehmen. Ist $g_n(x)$ die charakteristische Funktion von $\{x\} < q_n$, so ist $L_N(\theta) = \sum_{n \leq N} g_n(f_n(\theta))$ die Lösungsanzahl von (1). Will man II beweisen, so ist also zu zeigen, daß L_N nicht beschränkt ist. Dies wird so gezeigt, daß man zeigt:

$\int_a^b H_N^2 d\theta = o(\Phi_N^2)$, wo $H_N(\theta) = \sum_{n \leq N} h_n(f_n(\theta)) = L_N - \Phi_N$, $h_n = g_n - q_n$ ist. Dies folgt verhältnismäßig leicht aus der Abschätzung

$$\left| \int_a^b h_n(f_n(\theta)) d\theta \right| \leq \frac{2q_n}{f'_n(a)},$$

wo $a \leq \alpha \leq \beta \leq b$.

Hlawka (Wien).

LeVeque, W. J.: Note on a theorem of Koksma. Proc. Amer. math. Soc. **1** 380—383 (1950).

Für den bekannten Satz von Koksma (vgl. dies. Zbl. **12**, 14), daß die Folge (x^n) für fast alle $x > 1 \bmod 1$ gleichverteilt ist, sind schon viele Beweise gegeben worden. Verf. gibt nun einen Beweis, welcher sich auf Lemma 1 der Arbeit von Kac, Salem und Zygmund stützt (dies. Zbl. **32**, 274). Es wird gleich allgemeiner der folgende Satz bewiesen: Ist $g(x, n)$ definiert für alle x in (a, b) und alle natürlichen Zahlen n , sind g', g'' vorhanden, $g'(x, j) - g'(x, k)$ monoton und $\neq 0$ für $j \neq k$ und gilt für $x = a$ und $x = b$

$$|g'(x, j) - g'(x, k)| \geq c |j - k|^c$$

für ein $c > 0$ und $0 < \varepsilon \leq 1$, dann ist die Folge $(g(x, n))$ für fast alle x aus (a, b) mod 1 gleichverteilt, und es ist sogar $\sum_{n=1}^N e^{2\pi i m g(x, n)} = o(N^{\frac{1}{2} + \theta})$ ($\theta > 0$) für jede ganze Zahl $m \neq 0$ und für fast alle x aus (a, b) . Nach Hardy-Littlewood [Acta math. 37, 193—239 (1914)] ist für $g = x n^2$ die obige Summe sicher nicht $o(N^{\frac{1}{2}})$ für jedes irrationale x . Hlawka (Wien).

Davenport, H. and C. A. Rogers: On the critical determinants of cylinders. Quart. J. Math. (Oxford II. Ser.) 1, 215—218 (1950).

Let K be a star domain in the xy -plane and let C be the three-dimensional cylinder consisting of all points (x, y, z) for which $(x, y) \in K, |z| < 1$. Write $\Delta(K), \Delta(C)$ for the corresponding critical determinants. Rogers (this Zbl. 36, 311) has shown that $\Delta(C) < \Delta(K)$ for suitable K . Here it is shown that $\Delta(C)/\Delta(K)$ may be arbitrarily small. Cassels (Cambridge).

Mahler, K.: On the critical lattices of arbitrary point sets. Canadian J. Math. 1, 78—87 (1949).

Es sei S eine beliebige Menge im R_n , und man betrachte die Menge $\{A\}$ der S -zulässigen Gitter (d. h. kein Punkt von A außer höchstens O ist innerer Punkt von S). Die Determinante eines A werde mit $d(A)$ bezeichnet. Ist die obige Menge nicht leer (S heißt dann von endlichem Typus), dann heißt $\inf d(A) = \Delta(S)$ Minimaldeterminante von S . Ist dies nicht der Fall, so wird $\Delta(S) = +\infty$ gesetzt, und S ist von unendlichem Typus. S heißt vom Nulltyp, wenn $\Delta(S) = 0$. Ist nun $0 < \Delta(S) < \infty$ (dies werde jetzt vorausgesetzt) und A so beschaffen, daß $d(A) = \Delta(S)$, so heißt A kritisch. [Man vgl. zur ganzen Begriffsbildung die grundlegende Arbeit des Verf. „On lattice points in n -dimensional star bodies I.“ Proc. R. Soc., London, A 187, 151—187 (1946).] Verf. beweist nun: S besitzt dann und nur dann mindestens ein kritisches Gitter, wenn es eine beschränkte unendliche Teilfolge S -zulässiger Gitter A_r gibt, so daß $\lim_{r \rightarrow \infty} d(A_r) = \Delta(S)$ ist. Diese Voraussetzung ist erfüllt, wenn S den

Nullpunkt als inneren Punkt enthält oder S beschränkt ist. Der Beweis ist für den obigen Satz leicht zu führen. Das Hauptgewicht der Arbeit liegt im Nachweis der Tatsache, daß es Mengen S gibt, welche kein kritisches Gitter besitzen (was bei unseren Voraussetzungen über A bei Sternkörpern mit O als Mittelpunkt nicht vorkommen kann). Die Konstruktion von S mit dieser Eigenschaft ist nicht einfach. Dabei werden einige auch an sich interessante Hilfssätze bewiesen. Die Menge S hat nur abzählbar viele zulässige Gitter. Verf. gibt ein Beispiel von Rogers an, welches kontinuierlich viele solche Gitter hat und trotzdem kein kritisches Gitter besitzt. Bemerkenswert ist noch folgendes: Es gibt Mengen S , wo alle Punkte der kritischen Gitter vom Rand von S einen Abstand $> c > 0$ haben, was bei Sternkörpern ebenfalls nicht vorkommen kann. Hlawka (Wien).

Analysis.

Differentiation und Integration reeller Funktionen:

Marczewski, Edward: On a test of the σ -additivity of measure. Časopis Mat. Fys., Praha 74, Nr. 3, 140—141 [Polnisch] und 141 [Englisch] (1950).

Eggleston, H. G.: A geometrical property of sets of fractional dimension. Quart. J. Math. (Oxford II. Ser.) 1, 81—85 (1950).

Definition. In der euklidischen Ebene E sei ein Maß m_s erklärt wie folgt: Es sei A eine Punktmenge in E . Für beliebiges $\delta > 0$ sei $u = u(A, \delta)$ ein System von Mengen M derart, daß $A \subset \bigcup_{M \in u} M$ und $d(M) < \delta$, wobei $d(M)$ der Durchmesser von M , für jedes $M \in u$. Die Gesamtheit aller $u(A, \delta)$, bei festem A und δ .

sei $i(A, \delta)$. Dann wird gesetzt $m_s(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\inf_{M \in u} \left(\sum (d(M))^s; u \in i(A, \delta) \right) \right)$. Es ist \bar{m}_s eine Maßfunktion im Sinne von Carathéodory; $m_s|_{z_s}$ sei das von m_s induzierte Maß (also z_s ein σ -Mengenkörper). Es sei $e(X, Y)$ die Entfernung der Punkte $X, Y \in E$. Ergebnis. Es wird gezeigt: Vor. (1) Es sei $A \in z_s$ mit $0 < m_s(A) < +\infty$; (2) Jeder Punkt $P \in A$ sei Endpunkt eines Bogens $B(P)$ in E der (von P unabhängigen) Länge l ; (3) Es existiere eine feste Zahl k mit $0 < k \leq 1$ derart, daß $e(X', X'') \geq k \cdot e(P', P'')$ für beliebige $P', P'' \in A$ und beliebige $X' \in B(P')$, $X'' \in B(P'')$. Beh. Die Vereinigung $V(A)$ aller $B(P)$, also $V(A) = \bigcup_{P \in A} B(P)$, besitzt eine Dimension $\geq s + 1$. Ist die Dimension von $V(A)$ genau $s + 1$, so gilt $\bar{m}_{s+1}(V(A)) \geq k^s l m_s(A)$. Haupt (Erlangen).

Marczewski, E. et M. Nosarzewska: Sur la convergence uniforme et la mesurabilité relative. Colloq. math. 1, 15—18 (1948).

I. Zunächst wird folgendes bewiesen: Es seien $f(x)$ und $f_n(x)$ reelle, in $J = \langle a, b \rangle = (a \leq x \leq b)$ definierte Funktionen, ferner sei $w(x; f)$ die Schwankung von $f(x)$ in $x \in J$. Nun gilt: A. Vor. Die Folge $\{f_n\}$ konvergiere gleichmäßig in J . Beh. Es ist $f = \lim f_n$ stetig in J genau dann, wenn $\lim w(x; f_n)$ existiert und gleich Null ist für jedes $x \in J$. — B. Vor. Es sei f_n monoton in J , $n = 1, 2, \dots$. Beh. Es existiert $f = \lim f_n$ und ist stetig in J genau dann, wenn $\{f_n\}$ in J gleichmäßig konvergiert und $\lim w(x; f_n) = 0$ ist für jedes $x \in J$. — II. Anwendung. Es sei $L(M)$ das (1-dimensionale Lebesguesche) Maß der (Lebesgue-)meßbaren Menge M des E_1 . Existiert dann $L_r(M) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} L(M \cdot \langle 0, n \rangle)$, so heiße M relativ meßbar und $L_r(M)$ das relative Maß von M . Die in $H = (0 \leq x)$ definierte reelle Funktion $h(x)$ heiße relativ meßbar, wenn $[h < a]$ relativ meßbar ist für jedes reelle a . Man setze $d_n(a) = n^{-1} L([h < a] \cdot \langle 0, n \rangle)$ sowie $d(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n(a) = L_r([h < a])$ und bezeichne $d(a)$ bzw. $d_n(a)$ als Distributrix bzw. n -te Näherungsdistributrix von h in a . Es gilt dann: Vor. Es sei $h|H$ relativ meßbar. Beh. Die Distributrix von h ist stetig in H genau dann, wenn (1) die Folge der Näherungsdistributrices von h gleichmäßig konvergiert in jedem endlichen Intervall, (2) $L_r([h^{-1}(a)]) = 0$ ist für jedes reelle a . Haupt (Erlangen).

Hartman, S.: Sur deux notions de fonctions indépendantes. Colloq. math. 1, 19—22 (1948).

Sind $f_\nu(x)$, $\nu = 1, \dots, n$, im Intervall $(0, 1)$ m -meßbare reelle Funktionen, so heißen sie nach Steinhaus und Kac [Sur les fonctions indépendantes I. Studia math., Lwów 6, 47 (1936); dies. Zbl. 15, 218] stochastisch unabhängig, wenn für jede Teilmenge $\{j_1, \dots, j_k\}$ von $\{1, 2, \dots, n\}$ und jedes System E_1, \dots, E_k von Intervallen der y -Achse (offen oder nicht, endlich oder nicht) gilt:

$$m \left[\prod_{\lambda=1}^k f_{j_\lambda}^{-1}(E_\lambda) \right] = \prod_{\lambda=1}^k m \left[f_{j_\lambda}^{-1}(E_\lambda) \right]$$

wobei der Exponent -1 die Urbildmenge bezeichnet. Sie heißen nach Kolmogoroff [Ergebn. Math. 2, Nr. 3, Berlin 1933; dies. Zbl. 7, 216] stochastisch unabhängig, wenn obige Gleichung für beliebige E_λ mit m -meßbaren $f_{j_\lambda}^{-1}(E_\lambda)$ besteht. Offenbar ist die letzte Definition enger als die erste; Verf. beweist, daß beide Definitionen gleichwertig sind, falls m das Lebesguesche Maß ist. Aumann (München).

Cesari, Lamberto: Condizioni necessarie per la semicontinuità degli integrali sopra una superficie in forma parametrica. Ann. Mat. pura appl., Bologna, IV. S. 29, 199—224 (1949).

L'A. prosegue i suoi studi sulla semicontinuità di un integrale, J_s , di superficie, S (questo Zbl. 30, 390). La superficie S è continua, d'area finita secondo Lebesgue: l'integrale J_s è del tipo $\iint_Q F(x(u, v), y(u, v), z(u, v), H_1(u, v), H_2(u, v), H_3(u, v)) du dv$.

dove: 1. Q è il quadrato $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$; 2. $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ è una rappresentazione parametrica di S sopra il quadrato Q ; 3. $H_1(u, v)$, $H_2(u, v)$ ed $H_3(u, v)$ sono i Jacobiani generalizzati delle trasformazioni definite, fra il quadrato Q e le proiezioni di S sui piani coordinati, dalla rappresentazione parametrica di S adottata; 4. $F(x, y, z, u, v, w)$ è una funzione, definita per (x, y, z) variabile in un certo insieme chiuso ed (u, v, w) qualunque, continua rispetto al complesso delle sei variabili, positivamente omogenea di primo grado rispetto alle u, v , e w , dotata di derivate parziali rispetto alle u, v e w , queste derivate essendo continue. Per la semicontinuità di un siffatto integrale viene fra l'altro dimostrata la necessità della condizione di Weierstrass. *G. Scorza Dragoni.*

James, R. D.: A generalized integral. II. Canadian J. Math. 2, 297—306 (1950).

Verf. definiert ein P^2 -Integral analog wie das P (Perron)-Integral, wobei nur an Stelle der ersten Derivierten die zweiten treten. Ist $f(x)$ im Intervall (a, c) definiert, so heißen $M(x)$, $m(x)$ Ober- bzw. Unterfunktionen von $f(x)$, wenn 1. $M(x)$, $m(x)$ stetig, $M(a) = M(c) = m(a) = m(c) = 0$, 2. $D^2 M \geq f \geq \bar{D}^2 m$ mit höchstens abzählbar vielen Ausnahmestellen x , 3. $D^2 M > -\infty$, $\bar{D}^2 m < \infty$ mit höchstens abzählbar vielen Ausnahmestellen x , 4. M und m glatt in allen Ausnahmestellen von 2. und 3.—Für alle Ober- und Unterfunktionen ist dann $-M(x) \geq -m(x)$. $f(x)$ heißt P^2 -integrierbar, wenn $\underline{\text{fin}} [-M(x)] = \underline{\text{fin}} [-m(x)]$ ist, und diese Grenze wird als P^2 -Integral $\int_{a, x, c} f(x) dx$ bezeichnet. Verf. zeigt, daß es genügt, die

Bedingung 2 nur für fast alle x zu fordern und dann die Glattheit nur in den Ausnahmestellen von 3. Von den weiter bewiesenen Sätzen seien die folgenden erwähnt: Jede CP -integrierbare Funktion ist auch P^2 -integrierbar. Wenn fast überall $f_1(x) = f_2(x)$, so ist mit $f_1(x)$ auch $f_2(x)$ P^2 -integrierbar, und die Integrale sind gleich. Für eine periodische Funktion $g(x)$ mit der Periode 2π ist

$$\int_{-2\pi, 0, 2\pi} g(x) dx = \pi \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx,$$

falls das Integral rechts als CP -Integral existiert.

Perron (München).

Flori, Anna: Sull'integrazione delle funzioni d'insieme. Mat. Catania 3, 68—91 (1948).

Die Integralkonstruktion von J. C. Burkill [The derivatives of functions of intervals: Fundam. Math. 5, 321—327 (1924)] für Funktionen über Intervallen wird erweitert, indem an Stelle der Intervallmengen gewisse Familien L -meßbarer Mengen treten. Die einfachsten Tatsachen und Gesetze werden abgeleitet.

H. Hadwiger (Bern).

Orlicz, Władysław: Sur les fonctions continues non dérivables. Fundam. Math., Warszawa 34, 45—60 (1947).

In $J = [a \leq \hat{x} \leq b]$ seien die stetigen Funktionen $f_1(x), f_2(x), \dots$ mit gleichmäßig konvergenter Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ gegeben. Dazu betrachtet Verf. die stetigen Funktionen $q_\varepsilon(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n f_n(x)$ mit $\varepsilon = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots\}$ und $\varepsilon_n = 1$.

Das System der Folgen ε wird mit dem Abstand $d(\varepsilon, \varepsilon') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\varepsilon_n - \varepsilon'_n|$ ein vollständiger metrischer Raum E ; daneben vermitteln die dyadischen Zahlen bei Vernachlässigung einer abzählbaren Teilmenge eine eineindeutige Abbildung von E auf das Intervall $[0 \leq \xi \leq 1]$, wodurch in E auch ein Maß erklärt ist. — Es werden einerseits zusätzliche Bedingungen über die f_1, f_2, \dots angegeben, die bewirken, daß die Funktionen q_ε für alle ε mit Ausnahme einer Menge erster Kategorie in E , sei

es auf einer abzählbaren Teilmenge von J , sei es überall in J keine Ableitung besitzen, andererseits solche, die zur Folge haben, daß φ_ε für fast alle ε in E fast überall in J nicht differenzierbar ist. Analoge Probleme werden behandelt für den Fall, daß die ε_n nur die Werte 0 und 1 annehmen, ferner, daß (in Verallgemeinerung des bekannten Weierstraßschen Beispiels einer nirgends differenzierbaren Funktion) die $f_n(x)$ die Gestalt $\alpha_n f(\beta_n x)$ haben, wo die α_n und β_n positive Zahlen mit $\beta_n \rightarrow +\infty$ sind und $f(x)$ eine stetige periodische Funktion mit der Periode $b-a$ ist. Aumann.

Hummel, P. M. and C. L. Seebeck jr.: A generalization of Taylor's expansion. Amer. math. Monthly 56, 243—247 (1949).

Es sei $f(x)$ in einem Intervall, das die Punkte a und x enthält, stetig und habe darin stetige Ableitungen bis zur $(m+n+1)$ -ten Ordnung. Dann gilt die Entwicklung

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{m+n} \frac{(m+a-k)!}{(m+n)!} \left(\binom{m}{k} f^{(k)}(a) - (-1)^k \binom{n}{k} f^{(k)}(x) \right) (x-a)^k \\ + (-1)^n \frac{m!n!(x-a)^{m+n+1}}{(m+n)!(m+n+1)!} f^{(m+n+1)}(\theta) \quad (\theta \text{ zwischen } a \text{ und } x).$$

Der einfache Beweis schließt sich an den für die Taylorsche Formel üblichen an. Die Entwicklung, die verschiedene bekannte Formeln als Spezialfälle umfaßt, kann unter Umständen auch unendlich viele Glieder enthalten; sie lautet dann

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} (q^k f^{(k)}(a) - (-p)^k f^{(k)}(x)) \frac{(x-a)^k}{k! (p+q)^k} \quad (0 \leq p, q). \quad W. Hahn.$$

Milkman, Joseph: The logarithmic function is unique. Math. Mag., Pacoima Calif. 24, 11—14 (1950).

Lehmer, D. H.: Approximations to the area of an n -dimensional ellipsoid. Canadian J. Math. 2, 267—282 (1950).

Verf. betrachtet das Ellipsoid $E_n: \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{a_i^2} = 1$ ($a_1 \geq \dots \geq a_n > 0$) im R_n und sucht Abschätzungsformeln für die Oberfläche S von der Gestalt

$$P(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \pi_n [r(\lambda_1, \dots, \lambda_n)]^{n-1}.$$

wo π_n die Oberfläche der Einheitskugel ist und $r = \left(\frac{1}{n!} \sum a_1^{2\lambda_1} \dots a_n^{2\lambda_n} \right)^{1/2}$, $q^{-1} = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$, wobei sich die Summe über alle $n!$ Permutationen der λ erstreckt. Die λ können negativ und sogar komplex sein. Sind genau k der $\lambda_i \neq 0$, dann heißt P von der Klasse k und Dimension n . Ein Beispiel dafür ist für $n=2$, $k=1$ die Formel von T. Muir [On the perimeter of an ellipse, Messenger Math., II. S. 12, 149—151 (1883)] $2\pi \left[\frac{1}{2} (a_1^2 + a_2^2) \right]^{1/2}$ ($\lambda = \frac{3}{2}$). Approximationen von S durch P mit komplexen λ werden uneigentlich genannt. Es wird nun P und S nach Potenzen der Exzentrizitäten α entwickelt; so erhält der Verf. eine Entwicklung des relativen Fehlers $(P-S)/S$ von der Form $C_1 S_1 + C_2 S_2 + \dots$, wo die S symmetrische Funktionen in den α_i sind ($\sum \alpha_i^2 = S_1$, $\sum \alpha_i^4 \alpha_j^2 = S_2$, usw.) mit Koeffizienten, die Polynome in den elementarsymmetrischen Funktionen der λ sind mit rationalen Koeffizienten. Eine Approximation heißt nun von der Ordnung d , wenn in der obigen Entwicklung alle Terme verschwinden, welche symmetrische Funktionen der α mit Gewicht $< d$ enthalten, aber nicht alle mit Gewicht d . Verf. sucht nun nach Näherungen mit großem Gewicht, so daß möglichst viele C_i Null sind. Dies ist jetzt ein algebraisches Problem, und die λ_i sind dann algebraische Zahlen. Die Muirsche Formel ist von der Ordnung 8 und ihre n -dimensionale Verallgemeinerung $\left(k=1, \lambda = \frac{2(n+1)}{(n-1)(n+2)} \right)$, $P = \pi_n \left(\frac{1}{n} \sum a_i^2 \right)^{(n-1)/\lambda}$ von der Ordnung 6. Für $k=2$ gibt es Approximationen der Ordnung ≥ 8 , welche für $n > 3$ uneigentlich sind. Es gibt Ellipsoide („well poised“), für welche die Approximation sogar

von der Ordnung 12 ist. Für Anwendungen ist es unpraktisch, daß die auftretenden λ irrational sind. Verf. diskutiert dann noch Approximationen mit ganzen λ und Kombinationen davon. Hlawka (Wien).

Approximation und Reihendarstellung reeller Funktionen:

Behrend, F. A.: Some remarks on the distribution of sequences of real numbers. Amer. J. Math. **70**, 547—554 (1948).

x_1, x_2, \dots (1) sei eine Folge reeller Zahlen. $\Phi_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{1 \leq \nu \leq n} 1_{x_\nu \leq x}$. $\Phi(x)$ heißt asymptotische Verteilungsfunktion von (1), wenn $\Phi_n \rightarrow \Phi$ in allen Stetigkeitspunkten von Φ und Φ die bekannten Eigenschaften einer Verteilungsfunktion erfüllt.

Gefragt wird nach der Gültigkeit von (2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) d\Phi_n(x) \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f d\Phi$, wenn f stetig

und monoton ist. Sei Φ stetig. Es bezeichne $\mu_n = \min(x_1, \dots, x_n)$, $M_n = \max(x_1, \dots, x_n)$. Wenn $\sup |\Phi(x) - \Phi_n(x)| = O(\min\{\Phi(\mu_n), 1 - \Phi(M_n)\})$, heißt (1) normal. Verf. beweist: (2) ist richtig, wenn (1) normal ist. Er zeigt weiter: Jede Folge (1) kann durch Entfernung von Gliedern in der Anzahl $o(n)$ normal gemacht werden, unter Beibehaltung der asymptotischen Verteilungsfunktion. Unter geeigneten Modifikationen gelten ähnliche Sätze auch für unstetiges $\Phi(x)$. Wenn $\Phi(x)$ stetig ist, sind die Sätze in gewissem Sinne die besten. Schmetterer (Wien).

Erdős, P.: Some theorems and remarks on interpolation. Acta sci. math., Szeged **12A**, L. Fejér et F. Riesz LXX annos natis dedic., 11—17 (1950).

Premessi alcuni interessanti richiami sulle proprietà dei polinomi di interpolazione di Lagrange $L_n(f(x))$ di una funzione continua $f(x)$ definita in $(-1, 1)$, quando per ascisse dei punti interpolanti si assumono quelle di Tchebycheff di prima specie $x_k^{(n)} = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi$ ($k = 1, 2, \dots, n$), l'A. nota che un precedente risultato suo e di G. Grünwald [questo Zbl. **18**, 118] deve così modificarsi: Esiste una funzione continua $f(x)$ tale che per ogni x è $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{k=1}^n |L_k(f(x))| = \infty$. L'A. dimostra poi il seguente teorema: Se $f(x)$ è continua in $(-1, 1)$ si ha quasi ovunque

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |L_k(f(x))| = o(\log \log n),$$

e osserva che questo teorema non può migliorarsi. G. Sansone (Firenze).

Merli, Luigi: Sull'approssimazione delle funzioni continue di due variabili mediante polinomi. Boll. Un. mat. Ital., III. S. **5**, 68—71 (1950).

Fissato un doppio sistema di punti fondamentali: $x_r^{(n)}$ ($n = 1, 2, \dots$; $r = 1, 2, \dots, n$), $y_s^{(m)}$ ($m = 1, 2, \dots$; $s = 1, 2, \dots, m$) si considera il polinomio di interpolazione di Lagrange $L_{m,n}[f(x, y)]$ che assume nei punti $(x_r^{(n)}, y_s^{(m)})$ i valori della funzione $f(x, y)$. — Supposto che la funzione $f(x, y)$ sia periodica di periodo 2π in ciascuna variabile e lipschitziana, che i punti fondamentali siano gli zeri del polinomio di Tchebycheff di prima specie e che sia $h \leq m/n \leq k$, con h e k costanti assegnate, si ha: $\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} L_{m,n}[f(x, y)] = f(x, y)$. C. Miranda (Napoli).

Leja, François: Une méthode d'approximation des fonctions réelles d'une variable complexe par des fonctions harmoniques. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. **8**, 292—302 (1950).

Sia F la frontiera (di diametro transfinito positivo) di un dominio D del piano complesso contenente nel suo interno il punto $z = \infty$ e sia $f(z)$ una funzione reale de-

finita su F ed ivi limitata. Indicato con $\zeta^{(n)}$ il sistema degli n punti $(\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_n)$ sia $L^{(j)}(z, \zeta^{(n)})$ il relativo polinomio di Lagrange e λ un parametro non negativo. L'A. considera la funzione di z definita dalla relazione:

$$F(z, \lambda, \zeta^{(n)}) = \sum_{j=0}^n |L^{(j)}(z, \zeta^{(n)})| e^{\lambda f(\zeta_j)}$$

e successivamente la funzione $F_n(z, \lambda)$ uguale all'estremo inferiore della $F(z, \lambda, \zeta^{(n)})$ al variare del sistema $\zeta^{(n)}$ su F e infine la funzione definita nell'intero piano:

$f_n(z, \lambda) = \log \sqrt[n]{F_n(z, \lambda)}$. — L'A. dimostra che, comunque si fissino z e λ , esiste il limite: $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z, \lambda) = f(z, \lambda)$ e che, se λ è positivo, la $f(z, \lambda)$ è armonica all'esterno

di F . — Se la funzione $e^{f(z)}$ si può approssimare uniformemente mediante polinomi su F e la funzione $f(z)$ è continua su F si ha, uniformemente su F ,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} [\lambda^{-1} f(z, \lambda)] = f(z)$$

La prima ipotesi è verificata se F non divide il piano. — Dopo aver indicato altre proprietà della famiglia di funzioni: è indicata un' applicazione al problema di Dirichlet.

C. Miranda (Napoli).

Zamansky, Marc: Sur l'approximation des fonctions absolument continues à variation bornée. C. r. Acad. Sci., Paris **230**, 1730—1732 (1950).

Some statements concerning the approximation of absolutely continuous functions by trigonometric polynomials and in particular by its Fejér means are listed. They are similar to approximation properties obtained by the au. recently for functions whose best approximation is $E_n = O(n^{-1})$ or $= o(n^{-1})$, but unlike these, hold only almost everywhere.

G. G. Lorentz (Kingston, Ont.).

Ibragimov, I. I.: Über die beste Annäherung der Funktionen $[a x + b |x|] |x|^s$ durch Polynome auf dem Intervall $[-1, +1]$. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **14**, 405—412 (1950) [Russisch].

Verf. untersucht die „beste Annäherung“ der Funktion

$$V_s(x, a, b) = (a x + b |x|) |x|^s$$

durch Polynome $P_n(x)$, d. h. den Ausdruck $E_n(V_s) = \min_{P_n} \max_{-1 \leq x \leq +1} |V_s(x) - P_n(x)|$,

und bestimmt sein asymptotisches Verhalten für große s . Die Methode geht auf S. Bernstein zurück [Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **2**, 181—190 (1938); dies. Zbl. **22**, 216], der den Fall $a = 0$ erledigt hat. Haupthilfsmittel ist die Darstellung der Differenz $n^{s+1}(V_s - P_n)$ in der Gestalt

$$\begin{aligned} & - 4\pi^{-1} \left(b \cos(\pi s/2) \cos n x \int_0^\infty u^{s+2} (e^u + e^{-u})^{-1} (u^2 + n^2 x^2)^{-1} du \right. \\ & \left. + a \sin(\pi s/2) \sin n x \int_0^\infty u^{s+2} (e^u - e^{-u})^{-1} (u^2 + n^2 x^2)^{-1} du \right) + \varepsilon_n(x). \end{aligned}$$

Das Restglied geht mit wachsendem n gleichmäßig in x gegen Null. Das Verhalten der zwei Integrale für große s läßt sich übersehen. Führt man noch

$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{s+1} E_n(V_s(x, a, b)) = \lambda(s+1, a, b)$ und $\omega(s, a, b) = (a^2 \sin^2(\pi s/2) + b^2 \cos^2(\pi s/2))^{\frac{1}{2}}$ ein, so kann man das Endergebnis folgendermaßen formulieren:

$$(1 - 1/s) \omega(s, a, b) \pi^{-1} \Gamma(s+1) < \lambda(s+1, a, b) < \omega(s, a, b) \pi^{-1} \Gamma(s+1).$$

W. Hahn (Berlin).

Ditkin, V. A.: Über die Vollständigkeit eines Systems von trigonometrischen Funktionen. Uspechi mat. Nauk **5**, Nr. 2 (36), 196—197 (1950) [Russisch].

An elementary proof showing that the system

$$\varphi_n(x) = \cos n x + \lambda_n \sin n x, \quad \lambda_n \geq 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

is complete on $(0, \pi)$.

G. G. Lorentz (Kingston, Ont.).

Rogosinski, W. W. and G. Szegő: Extremum problems for non-negative sine polynomials. Acta Sci. math., Szeged 12B, L. Fejér et F. Riesz LXX annos natis dedic., 112—124 (1950).

Si considera la classe dei polinomi non negativi

$$S(\vartheta) = \sin \vartheta + \sum_2^n b_k \sin k\vartheta = \sin \vartheta P(\cos \vartheta),$$

essendo $P(\cos \vartheta)$ un polinomio di coseni, e si indica un procedimento generale per determinare, dato n , gli estremi di ogni b_k , in base alla rappresentazione parametrica di $P(\cos \vartheta)$ dovuta a F. Riesz ed L. Fejér [Über trigonometrische Polynome, J. reine angew. Math. 146, 53—82 (1916)]. Con vari procedimenti diretti si determinano poi effettivamente il massimo di $S(\vartheta)$ e gli estremi di $b_2, b_3, b_4, b_5, b_{n-1}, b_n$.

C. Miranda (Napoli).

Meňšov, D.: Über die Unbestimmheitsgrenzen trigonometrischer Reihen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 74, 181—184 (1950) [Russisch].

Verf. bewies in einer früheren Arbeit [Mat. Sbornik, n. S. 9, 667—691 (1941); dies. Zbl. 28, 51] folgenden Satz: Zu jeder in $\langle -\pi, \pi \rangle$ meßbaren und fast überall endlichen Funktion $f(x)$ gibt es eine trigonometrische Reihe $(1) \sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, die fast überall gegen f konvergiert. Nun wird darüber hinaus gezeigt (Satz 1): Sind $F(x)$ und $G(x)$ in $\langle -\pi, \pi \rangle$ meßbare Funktionen, die fast überall endlich sind und die Ungleichung $G(x) \leq F(x)$ erfüllen, so gibt es eine Reihe der Form (1), die fast überall die Häufungsgrenzen $F(x)$ und $G(x)$ hat (und deren Koeffizienten eine Nullfolge bilden). Dieser Satz bleibt auch richtig, wenn fast überall $F(x) = +\infty$, $G(x) = -\infty$ gilt. Satz 1 folgt aus dem oben erwähnten älteren Resultat und Satz 2: Ist $h(x) \geq 0$, meßbar in $\langle -\pi, \pi \rangle$, gegeben, so läßt sich eine Funktion $f \in L_1$ bestimmen, deren Fourierreihe fast überall die Häufungsgrenzen $f(x) + h(x)$ und $f(x) - h(x)$ hat. (Hier ist also $h(x) = \infty$ auf einer Nichtnullmenge zugelassen.) Dies ergänzt Resultate von Kolmogoroff [C. r. Acad. Sci., Paris 183, 1327—1328 (1926)] und Marcinkiewicz [Fundam. Math. 27, 38—69 (1936); dies. Zbl. 14, 215].

K. Zeller (Tübingen).

Ščerbina, A. D.: Über eine Methode der Summation der konjugierten Reihen von Fourierreihen. Mat. Sbornik, n. S. 27 (69), 157—170 (1950) [Russisch].

Bezeichne \bar{S}_k die k -te Partialsumme der konjugierten Reihe der Fourierschen Reihe von $f(x)$. Es sei

$$f_n(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{1/n}^{\pi} [f(x+t) - f(x-t)] \frac{1}{2} \cotg \frac{t}{2} dt$$

und

$$\bar{\sigma}_n(x) = \frac{1}{p+1} (S_{n-p} + \bar{S}_{n-p+1} + \cdots + S_n),$$

wo $p = p(n)$, $0 \leq p \leq n$. Es wird Folgendes bewiesen: 1. Dafür, daß $\sigma_n(x) - f_n(x)$ gleichmäßig gegen 0 strebt für jede nach 2π periodische stetige Funktion $f(x)$, ist notwendig und hinreichend, daß (*) $\liminf p(n)/n > 0$ gilt; 2. Die Bedingung (*) sichert die Konvergenz $\sigma_n(x) - \bar{f}_n(x) \rightarrow 0$ fast überall für jede in $(0, 2\pi)$ Lebesgue-integrierbare Funktion $f(x)$. Das letzte Resultat wird auch auf Fourier-Stieltjes-Reihen ausgedehnt. Als wesentlicher Hilfssatz wird die Norm M_p^n der linearen Transformation $f(x) \rightarrow \sigma_n(x) - f_n(x)$ des Raumes aller nach 2π periodischen stetigen Funktionen bestimmt: man hat

$$M_p^n = \frac{4}{\pi^2} \log \frac{n}{p+1} + O(1).$$

Béla Sz.-Nagy (Szeged).

Funktionentheorie:

● **Hornich, Hans:** *Lehrbuch der Funktionentheorie*. Wien: Springer-Verlag 1950. VII, 216 S. mit 34 Textabb. DM 19,50, geb. DM 21,60.

Aufgeteilt in 10 Kapitel mit den Überschriften: komplexe Zahlen, differenzierbare Funktionen, Potenzreihen, Integrale im Komplexen, Satz von Cauchy, isolierte Singularitäten, Reihen von Funktionen, analytische Fortsetzung, Untersuchung spezieller Funktionen, algebraische Funktionen und ihre Integrale, enthält das Buch etwa den Stoff, der in einer üblichen Vorlesung über Funktionentheorie dargeboten wird. Am Schluß jedes Kapitels sind einige einschlägige Übungsbeispiele zusammengestellt. — Als besondere Gegenstände seien hervorgehoben die Eulerschen Integrale und die im letzten Kapitel gegebene kurze Darstellung der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale mit spezieller Anwendung auf die elliptischen Funktionen. Klar und faßlich geschrieben und auf das Wesentliche beschränkt, ist das Buch für jeden, der sich irgendwie mit diesem Gebiet der Mathematik zu befassen hat, eine wertvolle Hilfe.

A. Pfluger (Zürich).

Blambert, Maurice: *Sur le problème de Hadamard-Mandelbrojt ou problème de la composition des singularités des séries de Dirichlet générales*. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 1915—1916 (1949).

Sind (α) und (β) die Singularitätenmengen der Potenzreihen $\sum a_n z^n$ bzw. $\sum b_n z^n$ bei radialer Fortsetzung, so ist die Singularitätenmenge von $\sum a_n b_n z^n$ in der Produktmenge $(\alpha\beta)$ enthalten. Wann ist $\alpha\beta$ eine Singularität von $\sum a_n b_n z^n$? Hierfür gab G. Pólya [Ann. Math., Princeton, II. S. 34, 731—777 (1933); dies. Zbl. 8, 62] verschiedene hinreichende Bedingungen an. In der vorliegenden Note werden analoge Resultate für die Hadamardsche Komposition von Dirichletschen Reihen angegeben für den Fall, daß β ein Pol ist.

A. Pfluger (Zürich).

Blambert, Maurice: *Quelques théorèmes de composition des singularités des séries de Dirichlet*. C. r. Acad. Sci., Paris 230, 1565—1567 (1950).

Analoge Untersuchungen wie in einer früheren Note (vgl. dies. Zbl. 34, 51) für den Fall, daß β eine wesentliche Singularität ist.

A. Pfluger (Zürich).

Shah, S. M.: *The maximum term of an entire series*. IV. Quart. J. Math. (Oxford II. Ser.) 1, 112—116 (1950).

Soit $\sum a_n z^n$ une fonction entière d'ordre ρ , $\mu(r)$ le terme maximum de la série pour $|z| = r$, $\nu(r)$ le rang de ce terme. — Si $\rho = \infty$, alors $\liminf \log M(r)/\nu(r) = 0$. — Si $L(x)$ est une fonction logarithmico-exponentielle tendant vers ∞ avec x et si m et M sont les \liminf et \limsup de $\log_2 \mu(r)/L(r)$, alors

$$\liminf \frac{\log \mu(r) r L'(r)}{\nu(r)} \leq \frac{1}{M} \leq \frac{1}{m} \leq \limsup \frac{\log \mu(r) r L'(r)}{\nu(r)}.$$

Dufresnoy (Bordeaux).

Shah, S. M.: *The maximum term of an entire series*. VI. J. Indian math. Soc., n. S. 14, 21—28 (1950).

(Notations de l'Art. précédent; v. aussi ce Zbl. 31, 394; 33, 364.) Si l et L sont les \liminf et \limsup de $\log_3 M(r)/\log_2 r$, on a

$$\limsup \frac{\log M(r)}{\nu(r)} \frac{\log_2 M(r)}{\log r} \geq \frac{1}{l}.$$

Si, de plus, $\log M(r) \sim \log \mu(r)$, on a

$$\liminf \frac{\log M(r)}{\nu(r)} \frac{\log_2 M(r)}{\log r} \leq \frac{1}{L}.$$

Dufresnoy (Bordeaux).

● **Gattegno, C. et A. Ostrowski:** *Représentation conforme à la frontière; domaines généraux*. (Mém. Sci. math., Nr. 109). Paris: Gauthier-Villars 1949. 60 p.

Das vorliegende Heft enthält eine systematische Darstellung der bis zur Einreichung des Manuskriptes im Jahre 1939 erzielten Resultate über das Randverhalten der konformen Ab-

bildung allgemeiner einfach zusammenhängender Gebiete. — Es konnten dabei einige seither erschienene Arbeiten mitberücksichtigt werden. Am Schluß des Heftes ist ein bis zum genannten Zeitpunkt vollständiges Literaturverzeichnis angegeben. Die Resultate über das Verhalten der konformen Abbildung an speziellen Rändern sollen in einem zweiten Heft zur Darstellung gelangen. — Im ersten Kapitel werden die topologischen Eigenschaften des Randes, die verschiedenen Sorten von Randelementen (Primenden) und deren Mächtigkeiten untersucht. Das zweite Kapitel enthält allgemeine funktionentheoretische Hilfsmittel wie Spiegelungsprinzip, Sätze über Randwerte analytischer und harmonischer Funktionen, Existenz der Winkelderivierten und Verwandtes. Das dritte Kapitel behandelt die Zuordnung der Randelemente im allgemeinen und bei Jordangebieten im besonderen, die Grenzpunktmenge der Abbildung bei Annäherung an einen Randpunkt, die gleichmäßige Stetigkeit der Abbildung und deren mannigfache quantitative Präzisierungen auf Grund gegebener metrischer Eigenschaften der Gebiete sowie allgemeiner Konvergenzsätze bei variablen Gebieten. — Das letzte Kapitel handelt vom konformen (harmonischen) Maß. In voller Allgemeinheit werden die Begriffe eingeführt und das Prinzip von der Gebietserweiterung sowie dessen mannigfaltige Anwendungen zur Abschätzung des konformen Maßes (Beurling, Nevanlinna, Ostrowski) durchgeführt. — Die übersichtliche Darstellung ermöglicht eine rasche Orientierung über den gegenwärtigen Stand der Kenntnisse vom Verhalten der konformen Abbildung am allgemeinen Rande. *A. Pfluger.*

Narodeckij, M. Z. und D. I. Šerman: Über ein Problem der konformen Abbildung. *Priklad. Mat. Mech.*, Moskva **14**, 209—214 (1950) [Russisch].

Die konforme Abbildung eines zweifach zusammenhängenden Gebiets in einen Kreisring wird für den Fall näherungsweise bestimmt, daß der Außenrand eine Ellipse, der Innenrand ein Kreis gleicher Mitte ist. Die Näherung gelingt mit befriedigender Genauigkeit. Sie beruht nach einer vorbereitenden Hilfsabbildung auf dem Ansatz der Gestalt

$$w(\tau) = \ln \frac{1-\rho}{\rho_1} + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \left(\tau^{2\nu} + \frac{\rho_1^{4\nu}}{\tau^{2\nu}} \right)$$

mit unbestimmten Koeffizienten a_{ν} , die durch Integrationen über den Innenrand zugänglich gemacht werden. Die Methode ist auch bei anderen zweifach zusammenhängenden Gebieten brauchbar, etwa mit Quadrat und Kreis als Randkurven.

Egon Ulrich (Gießen).

Egerváry, E.: On the mapping of the unit-circle by polynomials. *Acta Sci. math.*, Szeged **12B**, L. Fejér et F. Riesz LXX annos natis dedic., 226—230 (1950).

Si considera la classe $\{II\}$ dei polinomi $P(z)$ di grado non superiore ad n che verificano le condizioni: $P(0) = 0$; $\Re P(z) \geq -1$ per $|z| \leq 1$; e si dimostra che la somma degli insiemi del piano w in cui il cerchio unitario è rappresentato dalle trasformazioni $w = P(z)$, $P(z) \in \{II\}$, è un dominio convesso, la cui frontiera è costituita dal segmento $w = -1 + it$, $-\cotg \frac{\pi}{n+1} < t \leq \cotg \frac{\pi}{n+1}$, e dalla curva in cui l'arco $z = e^{it}$, $-\frac{2\pi}{n+1} \leq t \leq \frac{2\pi}{n+1}$, è rappresentato dalla trasformazione

$$w = P^*(z) = \frac{2}{n+1} \{nz + (n-1)z^2 + \dots + 1 \cdot z^n\}, \quad P^*(z) \in \{II\}.$$

La dimostrazione si basa sulla rappresentazione parametrica della classe $\{II\}$ data da L. Fejér [Über trigonometrische Polynome, *J. reine angew. Math.* **146**, 53—82 (1916)].

C. Miranda (Napoli).

Bonder, Julian: Sur les fonctions réalisant les représentations conformes et biunivoques d'un demi-plan sur les extérieurs des arcs de certaines courbes algébriques. *Časopis Mat. Fys.*, Praha **74**, Nr. 3, 178—179 und französ. Zusammenfassg. 179—180 (1950) [Polnisch].

Voranzeige einer in derselben Zeitschrift erscheinenden Arbeit.

Ilieff, Ljubomir: Anwendung eines Satzes von G. M. Golusin über die schlichten Funktionen. *C. r. Acad. Bulgare Sci.* **2**, Nr. 1, 21—24 (1949).

Für die Funktionen $f_k(z) = z + a_{k+1}z^{k+1} + a_{2k+1}z^{2k+1} + \dots$, welche im Kreise $|z| < 1$ k -symmetrisch, schlicht und regulär sind, wird eine Verallgemeinerung des

Koebeschen Verzerrungssatzes bewiesen: Es ist

$$(1-r^2)/(1+r^k)^{4/k} \leq |(f_k(z_1) - f_k(z_2))/(z_1 - z_2)| \leq 1/(1-r^k)^{4/k} (1-r^2),$$

wo $|z_1| \leq r$, $|z_2| \leq r < 1$. Als Anwendung wird bewiesen, daß alle Teilsummen einer für $|z| < 1$ ungeraden schlichten Funktion $f_2(z) = z + a_3 z^3 + \dots$ im Kreise $|z| < 1/\sqrt{3}$ schlicht sind, welcher Satz in gewissen speziellen Fällen schon früher bewiesen ist.

V. Paatero (Helsinki).

Levin, B. Ja.: Über regulär wachsende Funktionen endlicher Ordnung. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 71, 601—604 (1950) [Russisch].

Soit $u(z)$ une fonction de $z = x + iy$, harmonique pour $y > 0$, continue pour $y \geq 0$, telle que $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{u(z)}{|z|} < \infty$ et que $d = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \frac{dt}{1+t^2}$ existe; alors $u(z) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \frac{dt}{(t-x)^2 + y^2} + ky$ avec $k = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{u(iy)}{y}$; il en résulte que $\lim_{r \rightarrow \infty} u(re^{i\theta})/r = k \sin \theta$. Cette dernière conclusion subsiste si l'on remplace l'hypothèse „ d existe“ par les deux hypothèses suivantes:

$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{u(x)}{|x|} \leq 0$. — L'A. en déduit des conditions pour qu'une fonction $f(z)$, holomorphe de type fini d'ordre 1 dans $y \geq 0$, soit à croissance complètement régulière dans ce demi-plan.

Dufresnoy (Bordeaux).

Valiron, Georges: Surfaces de Riemann simplement connexes dont des points de ramification sont donnés. Ann. Mat. pura appl., Bologna, IV. S. 29, 321—326 (1949).

A sei eine abzählbare Punktmenge in der komplexen w -Ebene. Gibt es einfach-zusammenhängende, der w -Ebene überlagerte Riemannsche Flächen, so daß die Menge der Grundpunkte ihrer algebraischen Windungspunkte die gegebene Menge A enthält? Verf. gibt solche Riemannsche Flächen, und zwar sowohl vom parabolischen wie vom hyperbolischen Typus an durch Konstruktion der entsprechenden ganzen bzw. in $|z| < 1$ regulären Funktion $f(z)$.

A. Pfluger (Zürich).

Nevanlinna, Rolf: Bemerkungen zur Lösbarkeit der ersten Randwertaufgabe der Potentialtheorie auf allgemeinen Flächen. Math. Z., Berlin 53, 106—109 (1950).

Eine harmonische Funktion auf einer gegebenen Riemannschen Fläche F wird (abgesehen von trivialen Fällen) durch Uniformisierung in ein automorphes Potential im Einheitskreis $|z| < 1$ verwandelt. Dies eröffnet grundsätzlich die Möglichkeit, die Konstruktion einer harmonischen Funktion auf F mit vorgegebenen Randwerten mit Hilfe des Poissonschen Integrals durchzuführen. Verf. bemerkt, daß einer solchen Methode noch wesentliche Schwierigkeiten im Wege stehen. Einmal muß die logarithmische Kapazität des Randes von F positiv sein, damit einem Radius in $|z| < 1$ eine Kurve auf F entspricht, die gegen deren Rand konvergiert. Gibt man sich aber auf einer Fläche F mit positivem Rand bestimmte Randwerte vor, so ist die Meßbarkeit der entsprechenden Funktion $f(e^{i\varphi})$ im allgemeinen nur sehr schwer zu entscheiden.

A. Pfluger (Zürich).

Ter-Mikaëljan, T. M.: Untere Abschätzung des harmonischen Maßes einer Menge auf gewissen rektifizierbaren Kurven. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 71, 625—628 (1950) [Russisch].

Es sei $D(q)$ ein durch eine rektifizierbare Kurve Γ begrenztes, endliches, einfach zusammenhängendes Gebiet, das den Kreis $|z| < 1$ enthält und folgender Bedingung genügt: Das Verhältnis der Länge $L(\gamma)$ eines beliebigen Bogens γ des Randes Γ und der Sehne $d(\gamma)$ von γ liegt unter der festen Schranke q , $L(\gamma)/d(\gamma) < q$. Folgender

Satz wird bewiesen: Ist E eine auf Γ gelegene Punktmenge vom linearen Maß ε , so ist das harmonische Maß von E im Punkte $z = 0$ größer als $M\varepsilon^\delta$, wo $\delta > 1$ und M Konstanten sind, von denen δ lediglich von q , M von q und der Länge von Γ abhängt.

V. Paatero (Helsinki).

Rothstein, Wolfgang: Ein neuer Beweis des Hartogsschen Hauptsatzes und seine Ausdehnung auf meromorphe Funktionen. Math. Z., Berlin 53, 84—95 (1950).

F. Hartogs [Math. Ann. 62, 1—88 (1906)] hat den grundlegenden Satz aufgestellt: Sei $f(w, z)$ eine in $\{|w| < 1, |z| < 1\}$ reguläre Funktion mit der Eigenschaft, daß $f(c, z)$ für jedes feste c mit $|c| < 1$ als Funktion der einen Veränderlichen z in $|z| < 2$ regulär bleibt. Dann ist $f(w, z)$ in $\{|w| < 1, |z| < 2\}$ regulär. — Verf. gibt einen neuen Beweis dieses Satzes und seiner Verallgemeinerung auf Funktionen von mehr als zwei Veränderlichen. Während der Hartogssche Beweis von Reihenentwicklungen $\sum a_n(w) \cdot z^n$ ausgeht und wesentlich die Subharmonizität der $\log |a_n(w)|$ benutzt, macht Verf. lediglich vom superharmonischen Charakter der Regularitätsradialen und von einigen einfachen Aussagen über analytische und superharmonische Funktionen Gebrauch. Diese Beweisführung hat gegenüber der von Hartogs den Vorteil, daß sie auf meromorphe Funktionen ausgedehnt werden kann. Die Aussage des Hartogsschen Satzes bleibt demnach richtig, wenn „regulär“ durch „meromorph“ ersetzt wird. Eine entsprechende Übertragung ist, wie Verf. zeigt, für Funktionen von mehr als zwei Veränderlichen möglich. Stein (Münster).

Rothstein, Wolfgang: Die Fortsetzung vier- und höherdimensionaler analytischer Flächen des R_{2n} ($n \geq 3$). (Cousinsche Verteilungen 2. Art.) Math. Ann., Berlin 121, 340—355 (1950).

P. Thullen hat gezeigt (dies. Zbl. 11, 124), daß die wesentlichen Singularitäten $(2n - 2)$ -dim. analytischer Flächen \mathfrak{F} im Raume von n komplexen Veränderlichen nicht isoliert liegen können, sondern, in Analogie zu den Singularitäten analytischer Funktionen $f(z_1, \dots, z_n)$, unter bestimmten Voraussetzungen $(2n - 2)$ -dimensionale analytische Flächenstücke ausfüllen. In der vorliegenden Arbeit werden für $n \geq 3$ weitere Analogien zwischen analytischen Funktionen und Flächen aufgewiesen. Verf. überträgt den Kontinuitätssatz, der eine wichtige Grundlage für Untersuchungen über Singularitäten analytischer Funktionen mehrerer Veränderlichen bildet, sowie den Satz von Hartogs-Osgood über die Fortsetzung analytischer Funktionen vom Rande eines Gebietes ins Innere. Diese Übertragungen sind, falls die $(2n - 2)$ -dimensionalen analytischen Flächen \mathfrak{F} wie üblich durch Cousinsche Verteilungen regulärer Ortsfunktionen mit Äquivalenz in bezug auf Division vorgegeben werden, wie folgt zu formulieren: 1. (Kontinuitätssatz): G^{2k} sowie G_μ^{2k} ($k \geq 2$) mit den Rändern C bzw. C_μ seien abgeschlossene Gebiete auf $2k$ -dimensionalen ergänzten analytischen Flächenstücken F^{2k} bzw. F_μ^{2k} im R^{2n} ($n > k$), derart, daß die G_μ^{2k} innerhalb, die C_μ und C auf dem Rande eines schlichten beschränkten Regularitätsgebietes B des R^{2n} liegen. Die G_μ^{2k} mögen gegen G^{2k} und die C_μ gegen C konvergieren. In den G_μ^{2k} sowie auf C sei eine Cousinsche Verteilung V von regulären Ortsfunktionen vorgegeben. Dann gibt es ein μ_0 und dazu eine in G^{2k} und allen G_μ^{2k} mit $\mu \geq \mu_0$ erklärte Cousinverteilung V' , die in diesen G_μ^{2k} und auf C mit V äquivalent ist. Die Äquivalenzklasse von V' ist eindeutig bestimmt. 2. (Analogon zum Hartogs-Osgoodschen Satz): B sei ein schlichtes beschränktes Regularitätsgebiet im R^{2n} ($n \geq 3$) und R sein Rand. In einer Umgebung von R sei eine Cousinverteilung V von regulären Ortsfunktionen gegeben. Dann läßt sich V zu einer in ganz B erklärten Cousinverteilung V' fortsetzen, die bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmt ist. — Für beide Aussagen ist die Voraussetzung über B , Regularitätsgebiet zu sein, wesentlich. Im R^4 werden die Aussagen falsch; dagegen lassen sie sich, wenn $n \geq 3$ und $2 \leq m < n$, auf $2m$ -dimensionale analytische Flächen \mathfrak{F} im R^{2n} ausdehnen.

— Die Beweise sind aus Gründen der Übersichtlichkeit nur für $m = 2$, $n = 3$ im einzelnen ausgeführt, jedoch wird auf die im Allgemeinfall wichtigen Gesichtspunkte hingewiesen. Verf. gibt eine Reihe von Anwendungen seiner Resultate, von denen die folgende erwähnt sei: Wenn eine 4-dimensionale irreduzible analytische Fläche \mathfrak{F}^4 des (projektiv abgeschlossenen) R^6 keinen Punkt einer algebraischen Fläche \mathfrak{A}^4 im R^6 als wesentlichen Randpunkt besitzt und \mathfrak{A}^4 schneidet, so ist \mathfrak{F}^4 eine algebraische Fläche. Stein. (Münster).

Hervé, Michel: Sur l'itération des transformations analytiques portant sur deux variables complexes. C. r. Acad. Sci., Paris **230**, 1491—1493 (1950).

Sei F eine innere analytische Abbildung (jedoch kein Automorphismus) eines beschränkten Gebietes D im Raume zweier komplexer Veränderlichen. F möge eine in D gelegene analytische Fläche E in sich abbilden; E heiße invariant bezüglich F . Unter einer zu F gehörenden Grenztransformation Φ wird der Limes einer in jedem kompakten Teil von D gleichmäßig konvergenten Folge von Iterierten F_n von F verstanden. Verf. kündigt die folgenden Resultate an: 1. Existiert zu F eine Grenztransformation Φ , derart daß sich $\Phi(E)$ auf einen Punkt P_0 von E reduziert, so ist $F(P_0) = P_0$ und P_0 ist anziehender Fixpunkt auf E , d. h. es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(P) = P_0$

gleichmäßig für alle Punkte P jedes ganz im Innern von D gelegenen Teiles von E . 2. Ist E irreduzibel und existiert eine zu F gehörende Grenztransformation Φ , derart daß $\Phi(E)$ mindestens einen Punkt von E umfaßt, ohne sich auf diesen Punkt zu reduzieren, so bildet F die Fläche E umkehrbar eindeutig auf sich ab. Gleiches trifft dann zu für jede Grenztransformation Φ_1 mit der Eigenschaft, daß $\Phi_1(E)$ mindestens einen auf E liegenden Bildpunkt enthält; ist Φ_1 sogar eine innere Abbildung von D , so ist $\Phi_1(D) = E$. — Abschließend werden Fälle betrachtet, in denen invariante analytische Flächen E existieren. Es ergibt sich ein Satz von E. Peschl (dies. Zbl. **29**, 37): Gilt $F_n(D) \subset D$ für eine Iterierte F_n von F , so besitzt F einen anziehenden und keinen weiteren Fixpunkt. Stein (Münster).

Gewöhnliche Differentialgleichungen:

• **Ritt, Joseph Fels:** Differential algebra. (American Math. Soc. Colloquium Publications Vol. 33) New York: American Mathematical Society 1950. VIII, 184 p. \$ 4.40.

Das vorliegende Buch stellt gewissermaßen eine Zweitauflage der Colloquium publication XIV von 1932 (Differential equations from the algebraic standpoint; dies. Zbl. **5**, 394) dar. Es ist aber ein völlig neues Werk, da die behandelte Theorie sich in den letzten 18 Jahren mächtig weiterentwickelt hat (vgl. die Einleitung, sowie das Literaturverzeichnis am Schlusse des Buches). Auf zahlreiche, bisher noch ungelöste Probleme weist Verf. in einem Appendix hin. Bedauerndswert knapp ist das Sachverzeichnis; zum mindesten die kursorische Lektüre wird dadurch ziemlich erschwert. Andererseits ist die Sorgfältigkeit und Klarheit der Definitionen im Text besonders hervorzuheben. Sehr wertvoll ist es, daß die allgemeinen Überlegungen immer wieder durch Beispiele verdeutlicht werden. — Die Eigenart des Buches läßt sich kurz so charakterisieren: Nach dem Vorbild der Nullstellentheorie der Polynomideale wird eine entsprechende Theorie für Ideale von gewöhnlichen, formalen oder analytischen Differentialpolynomen (kurz D. P.) entwickelt. Die Ergebnisse werfen insbesondere auf die schwierigen Fragen, die mit den singulären Lösungen von Differentialgleichungssystemen zusammenhängen, neues Licht; so liefern sie z. B. ein einfaches und allgemeines Kriterium dafür, daß eine singuläre Lösung einer Differentialgleichung in der „allgemeinen Lösung“ enthalten ist. Auf der anderen Seite gewinnt man wichtige Einsichten in die Beziehungen, die zwischen den Lösungsmannigfaltigkeiten zweier Differentialgleichungen bestehen. Ein großer Teil der Resultate läßt sich, wie im Schlußkapitel IX kurz gezeigt wird, von den gewöhnlichen auf partielle Differentialgleichungen übertragen. Für den analytischen Fall braucht man dabei das in Kapitel VIII behandelte Riquiersche Existenztheorem für orthogonale Systeme. Beschränken wir uns der Kürze halber auf formale, gewöhnliche Differentialgleichungen, so lassen sich die wichtigsten Begriffsbildungen und Ergebnisse folgendermaßen zusammenfassen: Gegeben sei ein Differentialkörper $(D, \text{Körper})$, d. h. ein Körper \mathfrak{F} der Charakteristik 0, für dessen Elemente eine unbeschränkt ausführbare, den Bedingungen $(a+b)' = a' + b'$, $(a \cdot b)' = a' \cdot b + a \cdot b'$ genügende „Differentiation“ definiert ist. $y_i = y_{i0}$ ($i = 1, \dots, n$) seien endlich

viele Unbestimmte mit den formalen, durch die Gleichungen $y'_{ik} = y_{ik+1}$ ($i = 1, \dots, n; k = 0, 1, \dots$) gekennzeichneten Ableitungen y'_{ik} ($k = 1, 2, \dots$). Ein System von D. P., d. h. von Polynomen in den y_{ik} über \mathfrak{F} heißt Ideal, wenn es hinsichtlich der Addition und Multiplikation die üblichen Idealeigenschaften besitzt und außerdem gleichzeitig mit einem D. P. $A(y)$ stets auch $(A(y))'$ enthält. Die in \mathfrak{F} oder einem D -Oberkörper \mathfrak{F}_1 liegenden Nullstellen des D. P. $A(y)$ bzw. des Ideals \mathfrak{a} [Lösungen von $A(y) = 0$ bzw. $\mathfrak{a} = 0$] werden genau so definiert wie bei gewöhnlichen Polynomen. Die Menge aller Nullstellen von $A(y)$ bzw. \mathfrak{a} bildet die zu $A(y)$ bzw. \mathfrak{a} gehörige Mannigfaltigkeit. Ein Ideal \mathfrak{a} hat stets dieselbe Mannigfaltigkeit wie das zugehörige perfekte Ideal (Radikal) \mathfrak{r} , d. h. das Ideal aller D. P., von denen eine endliche Potenz in \mathfrak{a} liegt. — In Kap. I wird vor allem gezeigt, daß zwar keineswegs jedes Ideal, wohl aber jedes perfekte Ideal eine endliche Basis besitzt. Daraus folgt in bekannter Weise, daß jedes perfekte Ideal Durchschnitt von endlich vielen Primidealen (im üblichen Sinne) ist. In Kap. II wird genau wie bei den Polynomidealen zu jedem Primideal \mathfrak{p} eine „allgemeine Nullstelle“ konstruiert und die Dimension d definiert [d ist die größte nichtnegative Zahl, für die \mathfrak{p} kein D. P. enthält, das bei passender Numerierung nur von $y_{1k}, y_{2k}, \dots, y_{dk}$ ($k = 0, 1, \dots$) abhängt]. Ein Hauptergebnis von Kap. II ist, daß die Untersuchung der Mannigfaltigkeit eines beliebigen Ideals \mathfrak{a} durch Resolventenbildung auf die Betrachtung der Mannigfaltigkeit eines einzelnen D. P. $A(y)$ zurückgeführt werden kann. Zum besseren Verständnis der sehr mühsamen, zur Resolventenkonstruktion nötigen Überlegungen sei dem Leser empfohlen, Kap. IV vorwegzunehmen, in dem die Nullstellentheorie der algebraischen Gleichungen, vorwiegend im Geiste Kroneckers, entwickelt wird. Über die Lösungen von $A(y) = 0$, die in üblicher Weise in reguläre und singuläre eingeteilt werden, liefern Kap. II und III folgende Hauptresultate: Alle Primidealkomponenten $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_m$ des zum Hauptideal (A) gehörigen perfekten Ideals \mathfrak{r} haben die genaue Dimension $n - 1$. Für ein \mathfrak{p}_i , etwa für \mathfrak{p}_1 enthält die zugehörige Mannigfaltigkeit M_1 alle regulären Lösungen von $A(y) = 0$, die Mannigfaltigkeiten M_i der übrigen \mathfrak{p}_i bestehen ausschließlich aus singulären Lösungen. M_1 repräsentiert demnach die „allgemeine“ Lösung von $A(y) = 0$ und die Zugehörigkeit einer singulären Lösung zu M_1 ist als das Kriterium dafür anzusehen, daß diese Lösung „in der allgemeinen enthalten ist“. Jedes M_i ist die allgemeine Lösung eines passenden D. P. \mathfrak{p}_i . Ist $B(y)$ ein D. P., dessen allgemeine Lösung N_1 in der Gesamtmanigfaltigkeit $M = M_1 \cup \dots \cup M_m$ von $A(y)$ enthalten ist, so existiert ein rechnerisches Kriterium (low power theorem) dafür, daß N_1 mit einer der Komponenten M_i zusammenfällt. — In Kap. V wird, gestützt auf Kap. IV, ein Algorithmus gewonnen, um zu jeder Mannigfaltigkeit M_i von \mathfrak{a} mit endlich vielen Schritten ein zu dem M_i definierendes Primideal \mathfrak{p}_i „äquivalentes“ Ideal $(B_{i1}, \dots, B_{it_i}(y))$ zu berechnen, das ebenfalls M_i als zugehörige Gesamtmanigfaltigkeit besitzt. Allerdings läßt sich dabei die Anzahl der nötigen Schritte nicht von vornherein abschätzen. Dafür ist es wenigstens möglich, zu jedem \mathfrak{p}_i streng finit ein „charakteristisches System“ von D. P. zu bestimmen, wobei die Bedeutung dieses Systems durch die Analogie mit dem algebraischen Fall so verdeutlicht werden kann: Bei einem d -dimensionalen Polynomprimideal \mathfrak{p} in y_1, \dots, y_n würden die Polynome $p_i(y_1, \dots, y_{d+i})$ ($i = 1, \dots, n - d$) ein charakteristisches System darstellen, wenn nach Adjunktion von y_1, \dots, y_d zum Grundkörper das Erweiterungsideal von \mathfrak{p} die Basis (p_1, \dots, p_{n-d}) besäße. Kap. VI ist analytischen Betrachtungen gewidmet. Die Ergebnisse der durch zahlreiche Beispiele ausgezeichneten Untersuchungen von Kap. VII über die Durchschnitte der Mannigfaltigkeiten von D. P.-Idealen sind größtenteils negativ. Sie lehren, daß trotz vieler Analogien bei den D. P. doch wesentlich kompliziertere Verhältnisse vorliegen als bei gewöhnlichen Polynomen. Hingewiesen sei vor allem auf die an klassische Jacobische Ansätze anknüpfenden Betrachtungen, die sich (anschaulich gesagt), mit der Anzahl der in der allgemeinen Lösung eines Differentialgleichungssystems von n Gleichungen in n Unbekannten auftretenden Konstanten befassen, und die zu dem Ergebnis führen, daß hier mit einem ähnlich befriedigenden Theorem wie dem Bézoutschen Satz der Algebra nicht gerechnet werden darf.

Krull (Bonn).

Ritt, J. F.: Associative differential operations. Ann. Math., Princeton, II. S. 51, 756—765 (1950).

Die Bezeichnungen D -Körper, D. P., und die Symbole $y_i = y_{i0}, y_{ir}$ usw. haben dieselbe Bedeutung wie in der unmittelbar vorangehenden Besprechung. Gebildet werden formale „Potenzreihen“ $\mathfrak{A}(y) = A^{(1)}(y) + A^{(2)}(y) + \dots$ bei denen jeweils $A^{(i)}(y)$ ein D. P. bedeutet, das in den benutzten Variablen y_{ir} ($i = 1, \dots, n; r = 0, 1, 2, \dots$) über dem Koeffizienten- D -Körper homogen vom Grade i ist. Solche Reihen können nicht nur abgeleitet und in üblicher Weise formal addiert und multipliziert werden. Man erhält vor allem auch aus einer Reihe $\mathfrak{A}(y)$ eine neue Reihe $\mathfrak{B}(z)$, wenn man in $\mathfrak{A}(y)$ jede der Variablen y_i durch eine passende Reihe $\mathfrak{B}_i(z)$ in neuen Unbestimmten z_{kr} ($k = 1, \dots, m; r = 0, 1, 2, \dots$) und jede Abgeleitete y_{ir} durch die entsprechende Abgeleitete $\mathfrak{B}_{ir}(z)$ ersetzt. Schließlich läßt sich zu jeder Reihe der speziellen Form $\mathfrak{A}(y) = \alpha \cdot y + A^{(2)}(y) + A^{(3)}(y) + \dots$ ($\alpha \neq 0$) in einer einzigen Unbestimmten y und ihren Ableitungen y_r nach geläufigem

Schema eine eindeutig bestimmte, der Identität $\mathfrak{A}(\mathfrak{A}^{-1}(y)) = y$ genügende reziproke Reihe $\mathfrak{A}^{-1}(y)$ berechnen. — Ziel des Verf. ist es, die Reihen $\mathfrak{A}(y)$ zu einer abstrakten Verallgemeinerung der Lieschen Theorie zu benutzen. In der vorliegenden Note beschäftigt er sich im wesentlichen mit einer Differentialoperation des Ranges 1, worunter er die Bildung einer Reihe $\mathfrak{A}(u, v)$ in zwei Variablen u, v und ihrer Ableitungen u_r, v_r versteht. Eine Differentialoperation des Ranges 1 möge normiert genannt werden, wenn $\mathfrak{A}(u, 0) = u$, $\mathfrak{A}(0, v) = v$ wird. Sie heißt assoziativ, wenn die Beziehung $\mathfrak{Q}(\mathfrak{Q}(u, v), w) = \mathfrak{Q}(u, \mathfrak{Q}(v, w))$ besteht. Ist $\mathfrak{B}(z) = \alpha z + B^{(2)}(z) + B^{(3)}(z) + \dots$ ($\alpha \neq 0$) eine Reihe in der einen Unbestimmten z und ihren Ableitungen z_r , so entsteht aus $\mathfrak{A}(u, v)$ durch Bildung von $\mathfrak{B}^{-1}(\mathfrak{A}(\mathfrak{B}(u), \mathfrak{B}(v))) = \mathfrak{A}'(u, v)$ eine neue Differentialoperation des Ranges 1, die stets gleichzeitig mit $\mathfrak{A}(u, v)$ normiert und assoziativ ist. $\mathfrak{A}'(u, v)$ heißt zu $\mathfrak{A}(u, v)$ äquivalent. In der vorliegenden Note beweist der Verf. durch formale Rechnung den folgenden Hauptsatz: Jede normierte, assoziative Differentialoperation des

Ranges 1 ist entweder zu der Differentialoperation $\mathfrak{A}^*(u, v) \equiv u + v + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{v_r \cdot u^r}{r!}$ oder zu der Differentialoperation $\mathfrak{B}^*(u, v) \equiv u + v$ äquivalent. Dabei kann die Differentialoperation $\mathfrak{B}^*(u, v)$ als ein Grenzfall der Differentialoperation $\mathfrak{A}^*(u, v)$ aufgefaßt werden, die offenbar der Bildung von $u(x) + v(x + u(x))$ nebst anschließender formaler Taylorentwicklung von $v(x + u(x))$ entspricht. — Über Differentialoperationen von beliebigem Range n , die durch die Bildung von n Reihen $\mathfrak{A}_i(u, v)$ in $2n$ Unbestimmten u_k, v_k ($k = 1, \dots, n$) und ihren Ableitungen u_{kr}, v_{kr} definiert werden, enthält die vorliegende Arbeit nur einige grundsätzliche Bemerkungen und Beispiele. Wesentliche, die Operationen des Ranges n betreffende Resultate (abstraktes Analogon zu Lies drittem Fundamentaltheorem) werden in einer Fußnote angekündigt.

Krull (Bonn).

Kolehin, E. R.: Extensions of differential fields. III. Bull. Amer. math. Soc. 53, 397—401 (1947).

Die kurze Darstellung schließt an zwei vorangehende Arbeiten des Verf. an [Ann. Math., Princeton, II. S. 43, 724—729 (1942) und 45, 358—361 (1944)]. Verf. führt die Begriffe der Resolventen, der Dimension und der Ordnung eines differenzierbaren Primideals ein. Sie entsprechen den von J. F. Ritt eingeführten Bezeichnungen. Jedoch sind die Überlegungen einfacher und gelten für abstrakte differenzierbare Körper. — \mathfrak{F} sei ein partiell oder gewöhnlich differenzierbarer Körper der Charakteristik Null. y_1, \dots, y_n seien Unbestimmte, und es werde der Ring $R = \mathfrak{F}\{y_1, \dots, y_n\}$ betrachtet. In ihm sei $\Pi \neq R$ ein differenzierbares Primideal mit der erzeugenden Lösung (allg. Punkt) η_1, \dots, η_n . Der unter Einschluß der Differentiation gebildete Transzendenzgrad von $\mathfrak{F}\langle \eta_1, \dots, \eta_n \rangle$ über \mathfrak{F} sei q . Dann gilt $0 \leq q < n$, und genau q Elemente η_1, \dots, η_q unter den Elementen η_1, \dots, η_n sind differentiell-algebraisch unabhängig. q heißt die Dimension von Π . Nun sei \mathfrak{F} ein gewöhnlich differenzierbarer Körper. Der übliche Transzendenzgrad (ohne Einschluß der Differentiation) von $\mathfrak{F}\langle \eta_1, \dots, \eta_n \rangle$ über $\mathfrak{F}\langle \eta_1, \dots, \eta_q \rangle$ heißt die Ordnung von Π hinsichtlich y_1, \dots, y_q . Enthält $\mathfrak{F}\langle \eta_1, \dots, \eta_q \rangle$ wenigstens ein nicht-konstantes Element, so gibt es ein Element ω , so daß $\mathfrak{F}\langle \eta_1, \dots, \eta_q, \omega \rangle = \mathfrak{F}\langle \eta_1, \dots, \eta_n \rangle$ ist. Es sei nun $A = A(\eta_1, \dots, \eta_q, w) \in \mathfrak{F}\langle \eta_1, \dots, \eta_q \rangle\{w\}$ ein irreduzibles Differentialpolynom niedrigster Ordnung mit der Lösung $w = \omega$. Dann ist die Ordnung von A in w gleich der Ordnung von Π , und $A(\eta_1, \dots, \eta_q, w)$ heißt eine Resolvente von Π . Schließlich sei G eine differenzierbare Körpererweiterung von \mathfrak{F} . $\{\Pi\} = \Pi_1 \cap \dots \cap \Pi_r$ sei die Zerfällung des durch Π in $G\{y_1, \dots, y_n\}$ erzeugten perfekten Ideals in Primkomponenten, und $A_1(y_1, \dots, y_q, w) \cdots A_s(y_1, \dots, y_q, w)$ sei die vollständige Faktorzerlegung von $A(y_1, \dots, y_q, w)$ in $G\{y_1, \dots, y_q\}\{w\}$. Jedes A_i ist dann von der Ordnung p in w . Verf. beweist das Rittsche Ergebnis, daß ferner $r = s$ ist und

daß jedes A_i eine Resolvente eines der Π_j ist. — Im zweiten Teil der Arbeit wird die Berichtigung eines Fehlers aus „Extensions of differential fields II“ gegeben.
Kowalsky (Erlangen).

Kolehin, E. R.: Algebraic matrix groups and the Picard-Vessiot theory of homogeneous linear ordinary differential equations. Ann. Math., Princeton, II. S. 49, 1—42 (1948).

Die Picard-Vessiot'sche (PV) Theorie, die ein Analogon zur Galoisschen Theorie für lineare, homogene, gewöhnliche Differentialgleichungen darstellt, stützte sich in ihrer bisherigen Entwicklung wesentlich auf die Theorie der Lieschen Gruppen. Hierdurch ergeben sich gewisse Mängel: Die Fragestellung der PV-Theorie ist eine rein algebraische. Durch den hauptsächlich analytischen Charakter der Lieschen Theorie wird aber diese algebraische Natur der Fragestellung stark verwischt: Das naturgemäße Instrument der PV-Theorie sind nicht die Lieschen Gruppen, sondern die algebraischen Matrixgruppen, die jedoch bisher nur als Spezialfälle Liescher Gruppen untersucht wurden. Zunächst erweist es sich daher als notwendig, Struktursätze über algebraische Matrixgruppen auf rein algebraischer Grundlage zu entwickeln. Der Aufbau der PV-Theorie auf einer solchen algebraischen Theorie der Matrixgruppen begegnet dann gleichzeitig einem anderen Mangel: Vom algebraischen Standpunkt erscheint es als wünschenswert, die PV-Theorie sogleich für abstrakte Koeffizientenkörper zu entwickeln. In seiner einen sehr klaren Überblick vermittelnden Einleitung weist Verf. schließlich noch darauf hin, daß in der klassischen PV-Theorie vielfach die Begriffe nicht mit der nötigen Schärfe definiert sind. So wird als hervorstechendes Beispiel vom Verf. der Begriff „auflösbar durch Quadraturen“ angeführt, der innerhalb eines Beweises in zweierlei Bedeutung verwandt wurde. Die vorliegende Arbeit des Verf. setzt sich als Ziel, die PV-Theorie im Anschluß an die Ergebnisse von J. F. Ritt zu algebraisieren, ihre Begriffe scharf zu fassen und sie auf abstrakte Koeffizientenkörper auszudehnen. Entsprechend den oben angegebenen Gesichtspunkten gliedert sich die Arbeit in ein Kapitel über algebraische Matrixgruppen und in vier weitere Kapitel über die Galoissche Theorie differenzierbarer Körper. Unter ihnen befassen sich die beiden letzten Kapitel mit speziellen differenzierbaren Körpererweiterungen, den Picard-Vessiot'schen und den Liouvilleschen Erweiterungen. Für den letzten Typ werden im V. Kapitel bemerkenswerte und abgerundete Struktursätze hergeleitet. Aus der großen Stofffülle können hier nur die wesentlichsten Ergebnisse in einer kurzen Inhaltsübersicht zusammengestellt werden. — Kap. I: Die Matrizen einer Matrixengruppe \mathcal{G} vom Grade n über einem algebraisch abgeschlossenen Körper beliebiger Charakteristik können aufgefaßt werden als Punkte des n^2 -dimensionalen affinen Raumes. Die Matrixengruppe heißt algebraisch, wenn ihre Elemente in diesem Sinne umkehrbar eindeutig den Punkten einer algebraischen Mannigfaltigkeit entsprechen (abgesehen von den Punkten, denen singuläre Matrizen entsprechen). Diese algebraische Mannigfaltigkeit ist in bestimmtem Sinne eindeutig und heißt die \mathcal{G} zugeordnete Mannigfaltigkeit. Ihr definierendes Ideal heißt auch definierendes Ideal von \mathcal{G} . Die irreduziblen Komponenten der zugeordneten Mannigfaltigkeit einer algebraischen Matrixengruppe \mathcal{G} sind (bis auf singuläre Matrizen) paarweise fremd und alle von derselben Dimension. Die irreduzible Komponente, die den der Einheitsmatrix zugeordneten Punkt enthält, ist zugeordnete Mannigfaltigkeit eines algebraischen Normalteilers \mathcal{G}° von \mathcal{G} (Einheitskomponente) von endlichem Index. \mathcal{G} heißt zusammenhängend, wenn $\mathcal{G} = \mathcal{G}^\circ$ (d. h. die zugeordnete Mannigfaltigkeit ist irreduzibel). Für algebraische Matrixgruppen wird der Begriff der Normalreihe definiert und der Satz von Jordan-Hölder-Schreier bewiesen. Ferner wird die Auflösbarkeit einer algebraischen Matrixengruppe in üblicher Weise definiert. Betrachtet man in einer algebraischen Matrixengruppe \mathcal{G} die Elemente endlicher Ordnung > 1 , so heißt \mathcal{G} antikompakt, wenn die Ordnung jedes solchen Elements durch die Charakteristik des Körpers teilbar ist. \mathcal{G} heißt quasikompakt, wenn keine algebraische Untergruppe (außer der Einheitsmatrix selbst) antikompakt ist. \mathcal{G} ist genau dann antikompakt, wenn alle Matrizen aus \mathcal{G} nur charakteristische Wurzeln $= 1$ haben. \mathcal{G} ist quasikompakt genau dann, wenn sich jede Matrix aus \mathcal{G} auf Diagonalform bringen läßt. Es folgen einige Sätze darüber, wann \mathcal{G} simultan auf Dreiecks- bzw. Diagonalform gebracht werden kann. Schließlich werden noch Gruppen mit speziellen Normalreihen untersucht. — Kap. II gibt eine Zusammenstellung von Sätzen und Begriffen aus der Rittschen Theorie der algebraischen Differentialgleichungen in einem Umfang, der den Bedürfnissen der folgenden Kapitel entspricht. Um die Ausdrucksweise abzukürzen, soll jetzt stets unter Körper, Ring, Ideal usw. ein differenzierbarer Körper, differenzierbarer Ring usw. verstanden werden. — In Kap. III wird ein kurzer, sehr allgemein gehaltener Überblick über die Galoissche Theorie eines Körpers G über einem Unterkörper F der Charakteristik Null gegeben. Eine Menge \mathfrak{M} von Isomorphismen von G über F heißt „abundant“, wenn für jeden Zwischenkörper H und jedes $\alpha \in G - H$ ein Isomorphismus in \mathfrak{M} existiert, der F elementweise fest läßt, α aber auf ein anderes Element abbildet. G heißt normal über F , wenn die Menge aller Automorphismen von G über F „abundant“ ist. Ist \mathcal{G} eine „abundant“ Gruppe von Automorphismen von G über F , so läßt sich in üblicher Weise eine eindeutige Zuordnung zwischen allen Zwischenkörpern H und gewissen (nicht allen) Untergruppen $\mathcal{G}(H)$ von \mathcal{G} herstellen. Eine nicht-triviale Charakterisierung dieser Unter-

gruppen ist jedoch bei dieser Allgemeinheit Verf. bisher nicht möglich. Indessen wird eine solche für spezielle Körpererweiterungen im folgenden Kapitel gegeben. Die Heranziehung der „abundant“ Gruppen an Stelle der vollen Automorphismengruppen ist durch die Tatsache begründet, daß auch bei Verwendung der vollen Automorphismengruppe für Normalteiler $\mathcal{G}(H)$ die Faktorgruppe $\mathcal{G}/\mathcal{G}(H)$ nur isomorph ist zu einer „abundant“ Gruppe von Automorphismen von H über F (nicht zur vollen Gruppe dieser Automorphismen). — Kap. IV beschäftigt sich mit dem wesentlichen Spezialfall, daß G eine Picard-Vessiot (PV)-Erweiterung von F ist. Dabei heißt G eine PV-Erweiterung von F , wenn G aus F durch Adjunktion eines Fundamentalsystems von Lösungen einer homogenen, linearen, gewöhnlichen Differentialgleichung mit Koeffizienten aus F hervorgeht und wenn zweitens der Konstantenkörper von G mit dem Konstantenkörper C von F übereinstimmt. Ist n die Ordnung der erwähnten Differentialgleichung, so ist die Gruppe \mathcal{G} aller Automorphismen von G über F isomorph zu einer algebraischen Matrizen­gruppe vom Grade n über C . (C wird durchgehend als algebraisch abgeschlossen vorausgesetzt.) Jede PV-Erweiterung ist normal über F . $\mathcal{G}/\mathcal{G}(H)$ ist hier mit der Gruppe aller Automorphismen von H über F isomorph. Die den Zwischenkörpern zugeordneten Untergruppen von \mathcal{G} sind genau die algebraischen Untergruppen von \mathcal{G} . Schließlich wird noch der Zusammenhang zwischen der Zer­fällung der Differentialgleichung und der Reduzibilität von \mathcal{G} untersucht. — Wesentliche Struktur­ergebnisse werden endlich im V. Kapitel für Liouvillesche Erweiterungen gewonnen; das sind solche Erweiterungen, die aus F durch sukzessive Adjunktionen von Integralen, Exponentialen von Integralen und von algebraischen Funktionen hervorgehen und C ebenfalls als Konstantenkörper besitzen. Je nachdem, ob bei der Erweiterung alle angegebenen drei Möglichkeiten benutzt werden, oder nur gewisse von ihnen, teilt Verf. die Liouvilleschen Erweiterungen in 10 (sich teilweise umfassende) Typen ein. Jede Liouvillesche Erweiterung ist in einer Liouvilleschen Erweiterung enthalten, die sich durch normale Körpererweiterungen aufbauen läßt. Unter den zu PV-Erweiterungen G gehörenden Automorphismengruppen \mathcal{G} lassen sich ebenfalls 10 Typen aussondern derart, daß G genau dann in einer Liouvilleschen Erweiterung vom Typ 1—10 enthalten ist, wenn \mathcal{G} dem entsprechenden Gruppentypus angehört. Die Gruppentypen werden charakterisiert durch Auflösbarkeit, Antikompaktheit, Quasikompaktheit und Endlichkeit von \mathcal{G} und \mathcal{G}° . Im Anschluß an dieses Ergebnis lassen sich einige interessante Folgerungen ziehen. So kann z. B. jede Liouvillesche Erweiterung auch so gewonnen werden, daß man zunächst eine rein algebraische Erweiterung vornimmt und dann Erweiterungen lediglich mit Integralen und Exponentialen von Integralen anschließt. *Kowalsky (Erlangen).*

Kolchin, E. R.: On certain concepts in the theory of algebraic matrix groups.
Ann. Math., Princeton, II. S. 49, 774—789 (1948).

In seiner grundlegenden Arbeit über die Picard-Vessiot'sche Theorie (s. vorsteh. Referat) hat Verf. die Bedeutung der algebraischen Matrizen­gruppen für diese Theorie herausgestellt. Im ersten Kap. der genannten Arbeit wurde im Hinblick auf die nachfolgenden Anwendungen eine Theorie der algebraischen Matrizen­gruppen entwickelt. Als wesentliche Begriffe traten dabei auf: Zusammenhang, Einheitskomponente, Auflösbarkeit, Antikompaktheit und Quasikompaktheit. Diese Begriffe werden in der vorliegenden Arbeit vom Verf. näher untersucht. So wird in § 1 gezeigt, daß jede antikomakte algebraische Matrizen­gruppe auf spezielle Dreiecksform reduzierbar ist (in der Hauptdiagonalen lauter Einsen). Die folgenden vier Paragraphen befassen sich in der Hauptsache mit folgender Fragestellung: Von den oben genannten Begriffen ist lediglich die Antikompaktheit mit Hilfe rein gruppentheoretischer Terme definiert. Alle anderen Definitionen sind algebraisch-gruppentheoretischer Natur und benutzen die der Gruppe zugeordnete algebraische Mannigfaltigkeit. Verf. untersucht nun, in welchem Umfang sich diese Definitionen durch rein gruppentheoretische Charakterisierungen ersetzen lassen. Die Antwort auf diese Frage wird in § 5 gegeben: Antikompaktheit und Auflösbarkeit sind gruppentheoretische Begriffe. Zusammenhang und Einheitskomponente können ebenfalls rein gruppentheoretisch definiert werden, wenn der zugrunde gelegte Körper die Charakteristik Null besitzt. Für die Quasikompaktheit einer algebraischen Matrizen­gruppe ist eine solche Charakterisierung dann möglich, wenn die Gruppe zusätzlich als zusammenhängend und von bestimmter Dimension vorausgesetzt wird. Daß eine nur gruppentheoretische Definition in den noch offenen Fällen nicht möglich ist, wird vom Verf. an Hand von Gegenbeispielen bewiesen. Die für dieses Ergebnis nötigen Hilfssätze werden in den vorangehenden Paragraphen zusammengestellt. Unabhängig davon sind diese Sätze jedoch auch an sich von Interesse. *Kowalsky (Erlangen).*

●McLachlan, N. W.: *Ordinary non-linear differential equations in engineering and physical sciences*. Oxford: At the Clarendon Press 1950. VI, 201 p. 21/-net.

Eindrucksvolle Sammlung von typischen Beispielen für das Auftreten nicht-linearer Differentialgleichungen in der physikalischen und technischen Praxis. Ein theoretischer Hintergrund fehlt, doch finden sich Hinweise auf klassische, aber auch neueste mathematische Arbeiten. Es werden verschiedene Methoden vorgeführt, die sich bei wichtigen Problemen der Technik als nützlich herausgestellt haben; dabei ist Wert darauf gelegt, auch erkennbar zu machen, warum im Einzelfall die Linearisierung des Problems versagen muß. Das Buch soll und muß als Aufforderung an die Mathematiker wirken, die Behandlung nicht-linearer Differentialgleichungen in weit höherem Maße anzugreifen, als das bisher geschehen ist; die Technik der Gegenwart fordert gerade hier vertiefte mathematische Forschung. — Nach einer allgemeinen Einleitung mit Überblick über viele Einzelprobleme, die in das Gebiet führen (vgl. hierzu etwa Kármán, dies. Zbl. 24, 224), werden einige Fälle aufgezählt, die direkt integrierbar sind, und solche, die es mittels elliptischer Integrale und Funktionen werden. Für Gleichungen mit periodischen Lösungen werden Näherungsverfahren gegeben, wie schrittweise Näherung, Störungsmethode, Ansatz einer Fourierentwicklung mit Bestimmung der ersten Koeffizienten; beinahe periodische und nicht-periodische Lösungen werden durch die Methode langsam veränderlicher Amplitude und Phase angreifbar (wobei in gewissen Fällen äquivalente lineare Gleichungen hergeleitet werden), Gleichungen mit periodischen Koeffizienten, insbesondere über die Mathiesche Gleichung hinaus, durch Ansatz von periodischen Näherungslösungen; wir nennen als ein typisches Beispiel $y'' + (a - 2q \cos 2z)y + by^3 = 0$. In einem Schlußkapitel finden sich Anwendungen graphischer und numerischer Verfahren. — Das Buch ist ohne Einzelkenntnisse über spezielle Funktionen benutzbar; insbesondere wird des Verf. Monographie über Mathiesche Funktionen nur am Rande berührt (dies. Zbl. 29, 29). Umfangreiches Literaturverzeichnis sowohl nach technischer wie rein mathematischer Richtung. *E. Ullrich* (Gießen).

Szarski, Jacek: *On an oscillatory property of successive approximations*. Časopis Mat. Fys. Praha 74, Nr. 3, 230—231 (1950).

Mitrinovich, Dragoslav S.: *Sur un cas de réducibilité d'équations différentielles linéaires*. C. r. Acad. Sci., Paris 230, 1130—1132 (1950).

Some illustrative examples, found by elementary methods, in which the operator $D^2 + (ax + b)D + Ax^2 + Bx + C$ can be factorised as $f^{-1}(D + h)(fD + g)$, where f, g, h are polynomials in x of degrees $n, n + 1$ and 1 respectively, and $D = d/dx$. The au. promises a future paper unifying, from the above viewpoint, various differential equations, soluble by quadratures, that occur in the work of Kamke, Görtler, Conte, Forsyth and others. *W. W. Sawyer* (Christchurch).

Ghurye, S. G.: *The case of complex roots in the method of Frobenius*. J. Univ. Bombay, n. S. 18, Nr. 3 (Sci. Nr. 26), 1—3 (1949).

Points out that the method of Frobenius may in certain circumstances lead to series of the form $x^{a+ib} \sum_{n=0}^{\infty} (h_n + i k_n) x^n$. The au. discusses a method for finding explicitly the real solutions of the differential equation and gives recursion relations for h_n and k_n . The modified Bessel equation $x^2 y'' + x y' + (x^2 + m^2)y = 0$ is used as an example. *W. W. Sawyer* (Christchurch, New Zealand).

Mikołajska, Zofia: *Sur l'allure asymptotique des intégrales des systèmes d'équations différentielles au voisinage du point singulier*. Časopis Mat. Fys., Praha 74, Nr. 3, 207—208 und französ. Zusammenfassg. 208 (1950) [Polnisch].

Voranzeige einer in Ann. Soc. Polonaise Math. erscheinenden Arbeit.

Amerio, Luigi: *Studio asintotico del moto di un punto su una linea chiusa, per azione di forze indipendenti dal tempo*. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. S. 3, 19—57 (1950).

Sia l'equazione differenziale del 2° ordine $y'' = f(y, y')$ nella funzione incognita y della variabile indipendente t . La $f(y, y')$ sia continua insieme con le sue derivate parziali prime per tutti i valori di y e di y' da $-\infty$ a $+\infty$, periodica rispetto ad y , decrescente rispetto ad y' e tale che, per ogni y , i limiti di $f(y, y')$ per y' tendente a $+\infty$ o a $-\infty$ siano rispettivamente negativo e positivo. — Si ammetta che le radici dell'equazione $f(y, 0) = 0$, se esistono, siano tutte semplici. — L'A. fa lo studio qualitativo delle soluzioni dell'equazione rivolgendo l'attenzione ai casi in

cui al tendere di $t \rightarrow +\infty$ una di esse tenda ad una soluzione statica stabile o instabile, nel qual caso dice che la soluzione è stabile o instabile. Oltre a questa eventualità può solo verificarsi che la soluzione sia divergente, cioè tenda a $+\infty$ o a $-\infty$ per $t \rightarrow +\infty$. — L'A. mostra che le soluzioni instabili sono in numero finito e ogni soluzione divergente è somma di una funzione lineare, di una funzione periodica e di una funzione infinitesima per $t \rightarrow +\infty$. *G. Lampariello (Messina).*

Sansone, G.: Sopra l'equazione di A. Liénard delle oscillazioni di rilassamento. Ann. Mat. pura appl., Bologna, IV. S. 28, 153—181 (1949).

Consider the Lienard's equation (1) $\ddot{x} + \omega f(x) \dot{x} + \omega^2 x = 0$ where ω is a positive constant and $f(x)$ is continuous for $-\infty < x < +\infty$. The following results concerning existence and uniqueness of periodic solutions are proved. — Suppose $f(x)$ satisfies the two following conditions: (2) There exists an open interval (α, β) , $\alpha < 0 < \beta$, such that $f(x) < 0$ for x in it and $f(x) > 0$ for x outside it.

(3) Putting $F(x) = \int_0^x f(s) ds$, $N = F(\alpha) + |F(\beta)|$ one at least of the four sub-conditions below holds:

(3.1) there exists $x_0 > \beta$ such that $4N x_0 + 4N^2 \leq [F(x_0) - F(\beta)]^2$;

(3.2) there exists $x_0 < \alpha$ such that $4N |x_0| + 4N^2 \leq [F(x_0) - F(\alpha)]^2$;

(3.3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$; (3.4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = -\infty$.

Then the equation (1) has at least one periodic solution. If condition (2) and at least one of (3.3) or (3.4) hold and if there exists a real number γ such that $F(\gamma) = F(-\gamma) = 0$ then there exists one and only one periodic solution of (1). This is also the situation if in condition (2) $\alpha + \beta = 0$ and at least one of (3.3) or (3.4) holds. *M. M. Peixoto (Chicago, Ill.).*

Hartman, Philip and Aurel Wintner: On non-conservative linear oscillators of low frequency. Amer. J. Math. 70, 529—539 (1948).

In der Differentialgleichung (1) $x'' + f(t)x = 0$ sei die Funktion $f(t)$ für $0 \leq t < \infty$ stetig, positiv und nicht-wachsend, es sei $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$. Dann werden

die folgenden Hauptergebnisse über das Verhalten der Lösungen von (1) bewiesen: 1. Mindestens eine Lösung ist unbeschränkt. 2. Es gibt eine nicht-oszillatorische

beschränkte Lösung ($\neq 0$) genau dann, wenn (2) $\int_0^\infty t f(t) dt < \infty$. In diesem Fall

gibt es ein Paar von Lösungen x_1, x_2 mit $x_1(t) \sim 1$, $x_1'(t) = o(1)$, $x_2(t) \sim t$, $x_2'(t) \sim 1$ für $t \rightarrow \infty$. 3. (1) kann oszillatorisch sein und eine beschränkte Lösung ($\neq 0$) besitzen. 4. Alle Lösungen von (1) sind oszillatorisch und unbeschränkt unter den

Voraussetzungen: $f(t)$ ist zweimal stetig differenzierbar, (3) $\limsup_{t \rightarrow \infty} (-f'/f^{3/2}) < 4$,

$(-f'/f)' \leq 0$ [$f(t)$ logarithmisch konvex]. 4a. Wird in den Voraussetzungen unter 4. (3) durch $\limsup_{t \rightarrow \infty} (-f'/f^{3/2}) = 4$ ersetzt, so braucht (1) nicht oszillatorisch zu

sein. 5. Alle Lösungen von (1) sind unbeschränkt, wenn (2) nicht gilt und $-\log f(t)$ von regulärem Wachstum ist. (Nach G. Armellini [Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fis. mat. natur., VI. S. 21, 111—116 (1935); dies Zbl. 11, 209] heißt eine nicht abnehmende Funktion $F(t)$ von irregulärem Wachstum, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine unbeschränkte Folge $0 < a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots$ mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} (F(b_n) - F(a_n)) < \infty, \quad \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{a_m} \sum_{n=1}^{m-1} (a_{n+1} - b_n) < \varepsilon$$

gibt.) — Zu 2. werden die Ergebnisse von M. Bôcher [Trans. Amer. math. Soc. 1, 40—52 (1900)] benutzt, für die sich einfache Beweise bei A. Wintner [dies. Zbl. 34, 354, 355] finden. 4. und 4a. verwenden das klassische Resultat von A. Kneser

[Math. Ann. **42**, 409—435 (1893)]. In einer Schlußbemerkung wird auf Analogien zu Sätzen über (1) unter den „dualen“ Voraussetzungen $f > 0$, $df \geq 0$, $f(t) \rightarrow +\infty$ für $t \rightarrow \infty$ hingewiesen. So ist der Beweis zu 5. völlig analog zu dem eines „dualen“ Satzes bei Armellini (s. o.). F. W. Schäfke (Mainz).

Hartman, Philip and Aurel Wintner: On the asymptotic problems of the zeros in wave mechanics. Amer. J. Math. **70**, 461—480 (1948).

Für $0 < s < \infty$ sei $f(s)$ eine reelle stetige Funktion mit $f(s) \rightarrow +\infty$ für $s \rightarrow \infty$. Dann besitzt die Differentialgleichung $\varphi''(s) + \{\lambda - f(s)\}\varphi(s) = 0$ für jedes reelle λ eine Lösung $\varphi_\lambda(s) \neq 0$ mit $\varphi_\lambda(s) \rightarrow 0$ bei $s \rightarrow \infty$, während jede davon linear unabhängige Lösung für $s \rightarrow \infty$ gegen $+\infty$ oder $-\infty$ strebt. [A. Kneser, J. reine angew. Math. **116**, 178—212 (1896)]. Daher besitzt $\varphi_\lambda(s)$ in jedem Intervall $0 < s_0 \leq s < \infty$ höchstens endlich viele Nullstellen. Im folgenden bezeichne $s^*(\lambda)$ die größte dieser Nullstellen, f^{-1} die Umkehrfunktion zu f , $\iota = 1,85575 \dots$ die

kleinste positive Nullstelle der Airyschen Zylinderfunktion $\Psi(t) = \int_0^\infty \cos(r^3 + rt) dr$.

Es wird bewiesen: 1. Ist zusätzlich für große s $f(s)$ zweimal stetig differenzierbar, $f''(s) \geq 0$ und $f''(s) = o\{f'(s)\}^{4/3}$ für $s \rightarrow \infty$, so gilt bei $\lambda \rightarrow +\infty$

$$s^*(\lambda) - f^{-1}(\lambda) \sim \iota \cdot \{3f'(f^{-1}(\lambda))\}^{-1/3}.$$

2. Wird zusätzlich neben $\liminf f(s) > -\infty$ für $s \rightarrow 0$ nur $f(s)$ für große s von unten konvex vorausgesetzt, dann gilt für die in diesem Falle stets endliche Anzahl $N(\lambda)$ der Nullstellen von $\varphi_\lambda(s)$ für $0 < s < \infty$ noch die summatorische Aussage:

$$\pi N(\lambda) \sim \operatorname{Re} \int_0^{f^{-1}(\lambda)} \{\lambda - f(r)\}^{1/2} dr \text{ für } \lambda \rightarrow +\infty. - 1. \text{ verallgemeinert Resultate von}$$

G. N. Watson (A treatise on the theory of Bessel functions, Cambridge 1922, p. 521) für die Besselsche Differentialgleichung und von F. Zernike [Proc. Akad. Wet., Amsterdam **34**, 673—680 (1931); dies. Zbl. **2**, 404] für die Hermitesche Differentialgleichung. 2. verbessert durch Abschwächung der Voraussetzungen ein Ergebnis von W. E. Milne [Trans. Amer. math. Soc. **31**, 906—918 (1929)]. F. W. Schäfke.

Kasner, Edward and Don Mittleman: On the initial curvature of dynamical trajectories. Rev. Univ. nac. Tucumán, A **6**, 71—79 (1947).

Es handelt sich um den Beweis eines an anderer Stelle ausgesprochenen Satzes [E. Kasner, D. Mittleman, Science, New York **95**, 249—250 (1942)]: $d^r x/dt^r = \varphi(x, y)$, $d^r y/dt^r = \psi(x, y)$ sei ein Beschleunigungsfeld der Ordnung r . Berührt eine Kraftlinie dieses Feldes in einem Punkte (a, b) ihre Tangente in der n -ten Ordnung, so berührt auch die Bahnkurve mit den Anfangsbedingungen $x=a$, $y=b$, $dx/dt = dy/dt = \dots = d^{r-1}x/dt^{r-1} = d^{r-1}y/dt^{r-1} = 0$ für $t=0$ diese Tangente in der Ordnung n . Die Potenzreihenentwicklung dieser Bahnkurven enthält nur Glieder mit den Exponenten kr ($k=1, 2, \dots$). Rinow (Greifswald).

Kasner, Edward and John De Cicco: Harmonic transformations and velocity systems. Rev. Univ. nac. Tucumán, A **6**, 187—193 (1947).

Eine Abbildung $X = X(x, y)$, $Y = Y(x, y)$ eines Gebietes der (x, y) -Ebene auf ein Gebiet der (X, Y) -Ebene heißt harmonisch, wenn ihre Funktionaldeterminante nicht verschwindet und die Funktionen $X(x, y)$, $Y(x, y)$ beide der Laplace'schen Gleichung (nicht aber notwendigerweise den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen) genügen. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Lösungskurven eines Differentialgleichungssystems der Form

$$(1) \quad v'' = A(u, v) + B(u, v)v' + C(u, v)v'^2 + D(u, v)v'^3$$

durch eine harmonische Abbildung in das System der Geraden der (X, Y) -Ebene übergeführt werden können, ist das gleichzeitige Bestehen der vier partiellen Differentialgleichungen $AC - A_v = 0$, $AD - B_v = 0$, $AD + C_u = 0$, $BD + D_u = 0$. Dabei sind $u = x + iy$, $v = x - iy$ Minimalkoordinaten der (x, y) -Ebene. Es

ergibt sich darüber hinaus der folgende Satz: Ist $A \equiv D \equiv 0$ (velocity system), so ist die harmonische Abbildung, welche das Lösungssystem von (1) in das System der Geraden der (X, Y) -Ebene überführt, das Produkt aus einer konformen Abbildung und einer Affinität. Rinow (Greifswald).

Bartolini, Fernando: Sugli integrali di una equazione differenziale ordinaria. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. 8, 285—292 (1950).

Se $z(x)$ è una soluzione dell'equazione $\frac{d^n z(x)}{dx^n} = \sum_{s=0}^{n-1} g_s(x) \frac{d^s z(x)}{dx^s}$, determinata in un punto x_0 dai dati di Cauchy e $z(x_0) \neq 0$, l'A. prendendo le mosse da un lavoro di M. Picone [questo Zbl. 24, 314] assumendo per funzione incognita $y(x) = \log |z(x)|$ determina un intervallo aperto dove $z(x) \neq 0$. — Il risultato è illustrato con un esempio nel caso delle equazioni differenziali lineari omogenee di secondo ordine. Giovanni Sansone (Firenze).

Partielle Differentialgleichungen. Potentialtheorie:

Hornich, Hans: Lösbarkeit einer speziellen Differentialgleichung mit einem Parameter und Transcendenz von Zahlen. Mh. Math., Wien 54, 183—187 (1950).

Verf. findet bei der Differentialgleichung

$$a^2 \left(r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \sum_{n=0}^{\infty} r^{2n+1} \sum_{\nu=0}^n \cos(2\nu+1)\varphi \quad (0 < a < 1)$$

trotz ihres harmlosen Aussehens (die Reihe ist leicht zu summieren) höchst merkwürdige Resultate. Sucht man nämlich ein Integral der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \sum (\alpha_{n\nu} \cos \nu \varphi + \beta_{n\nu} \sin \nu \varphi) \quad (n=0, 1, 2, \dots; \nu=n, n-2, n-4, \dots, n-2 \left[\frac{n}{2} \right]),$$

so bekommt man durch Koeffizientenvergleich die Bedingungen $\alpha_{n\nu}(a^2 n^2 - \nu^2) = 1$ für n ungerade, $\alpha_{n\nu}(a^2 n^2 - \nu^2) = 0$ für n gerade, $\beta_{n\nu}(a^2 n^2 - \nu^2) = 0$ für alle n . Ist nun $a = p/q$ rational und sind p, q ungerade, so ergibt die erste Bedingung mit $n = q, \nu = p$ einen Widerspruch; es gibt also kein solches Integral. Ist aber eine der Zahlen p, q gerade, so bleiben unendlich viele Koeffizienten willkürlich, und die betreffenden Reihen konvergieren, sind also Lösungen. Ist a irrational, so sind die $\alpha_{n\nu}, \beta_{n\nu}$, abgesehen von dem willkürlich bleibenden α_{00} , eindeutig bestimmt. Aber es gibt Fälle, in denen der Konvergenzradius $= 0$ ist, also kein solches Integral existiert, und auch Fälle, in denen er > 0 ist, also ein Integral existiert. Zur ersten Sorte gehören insbesondere gewisse Liouvillesche Zahlen a , zur zweiten Sorte alle (nicht rationalen) algebraischen Zahlen a . Perron (München).

Krzyżański, M.: Un problème aux limites relatif aux équations du type elliptique. Colloq. math. 2, 71—72 (1949).

Bergman, Stefan: An initial value problem for a class of equations of mixed type. Bull. Amer. math. Soc. 55, 165—174 (1949).

Data l'equazione del 2° ordine di tipo misto

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + (-x)^s \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (x < 0), \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - x^s \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (x > 0)$$

dove s è una costante reale > -1 , ψ è una funzione reale delle variabili reali x, y , l'A. stabilisce una rappresentazione integrale per la soluzione soddisfacente alle condizioni seguenti: 1. $\psi(0, y) = T(y)$; 2. $\psi_x(0, y) = S(y)$; 3. $T(y)$ ed $S(y)$ sono funzioni analitiche della variabile reale y e quindi prolungabili analiticamente in un campo della variabile complessa $\eta = y + i y_1$ contenente l'asse delle y . — Tale soluzione che, per ogni valore di y , è analitica nella variabile reale $(-x)^{s+2}$ per $x < 0$ e nella variabile reale x^{s+2} per $x > 0$ si ottiene come somma di due soluzioni $\psi^{(1)}$ e $\psi^{(2)}$ tali che

$$(2) \quad \psi^{(1)}(0, y) = T(y), \quad \psi_x^{(1)}(0, y) = 0 \quad (3) \quad \psi^{(2)}(0, y) = 0, \quad \psi_x^{(2)}(0, y) = S(y).$$

ha tutte le sue soluzioni indipendenti dalle variabili x, y, z . L'A. osserva anche qui che queste condizioni esprimono l'esistenza della derivata della funzione $\lambda X + \mu Y + \nu Z$ rispetto alla variabile $w = \lambda x + \mu y + \nu z$, ove si interpretino λ, μ, ν quali unità indipendenti in una certa algebra. *G. Lampariello* (Messina).

Krzyżański, Mirosław: Sur la solution élémentaire de l'équation de la chaleur. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. 8, 193—199 (1950).

Die Elementarlösung $U(x, t) = t^{-\frac{1}{2}} \exp(-x^2/4t)$ der Wärmeleitungsgleichung $\partial^2 u / \partial x^2 = \partial u / \partial t$ ist die einzige, welche in $(-\infty < x < +\infty, 0 \leq t \leq h \leq \infty)$, mit Ausschluß des Punktes $(0, 0, 1)$ stetige zweite Ableitungen hat, 2) nichtnegativ ist, 3) für $x \neq 0 = t$ den Wert Null hat, 4) für das Integral $j(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) dx$

beschränkte Werte liefert mit dem Grenzwert $j(+0) = 1$. Verf. bezieht sich dabei auf einen von ihm aufgestellten Eindeutigkeitssatz für parabolische Differentialgleichungen, der seinerzeit noch nicht erschienen war (Sur l'équation aux dérivées partielles de la diffusion, Ann. Soc. Polonaise Math. 23, 95—111 (1950)); doch läßt sich hier, wie W. Feller bemerkte, die Eindeutigkeit auch aus einem von ihm gefundenen Satz ableiten. *Bödewadt* (Brunoy).

Manarini, Mario: Sull'equazione del calore. Boll. Un. mat. Ital., III. S. 4, 117—121 (1949).

E. Beltrami ha dimostrato che l'integrale

$$U(P, t) = \int_{\tau} \frac{K(M) \psi(r, t)}{r} d\tau,$$

dove r è la distanza dal generico punto M di τ di un punto P qualunque dello spazio soddisfa all'equazione del calore $a^{-2} \partial u / \partial t = \Delta u$ se la $\psi(r, t)$ è nulla identicamente in t per $r = 0$, è tale che $a^{-2} \partial \psi / \partial t = \partial^2 \psi / \partial r^2$ ed inoltre sono soddisfatte per K e ψ ovvie condizioni di regolarità. L'A. studia il comportamento di altre soluzioni dell'equazione del calore, espresse da integrali superficiali del tipo

$$\int_{\sigma} \frac{K(M) \psi(r, t)}{r} d\sigma, \quad \int_{\sigma} K(M) \text{grad}_P \frac{\psi(r, t)}{r} \times n d\sigma$$

nell'intorno della superficie σ di integrazione, avendo in vista la discussione del problema di caratterizzare una soluzione di quella equazione avente valori assegnati al contorno. *G. Lampariello* (Messina).

Sbrana, Francesco: Sopra alcuni problemi di propagazione in più dimensioni. Ann. Mat. pura appl., Bologna, IV. S. 30, 191—200 (1949).

Verf. redet einleitend den „direkten“ symbolischen Methoden das Wort, im Gegensatz zu den indirekten (z. B.: Laplace-Transformation), die auch stets der nachträglichen Probe bedürften. (Der heuristische Wert direkter Methoden steht fest, sonst aber sind sie doch nur Vorstufe der abbildenden Methoden, die weitgehend durch Existenz- und Eindeutigkeitssätze gestützt sind. D. Ref.) — Um die symbolischen Methoden simultan auf zwei Dimensionen auszudehnen, beweist Verf. zunächst die Darstellung

$$(1) \quad f(x, y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{2\pi} \iint f(u, v) du dv \int_0^{\infty} r e^{-\varepsilon r} J_0(rR) dr, \quad \text{worin}$$

$$R^2 = (x - u)^2 + (y - v)^2; \quad \int_0^{\infty} r e^{-\varepsilon r} J_0(rR) dr = \varepsilon \cdot (\varepsilon^2 + R^2)^{-3/2}.$$

Die Wellengleichung $\partial^2 \varphi / \partial t^2 = V^2 \Delta \varphi$ ergibt dann, nachdem formal $\Delta = (\sqrt{\Delta})^2$ gesetzt worden ist, „direkt“ die Lösungen $\varphi(x, y, t) = C \cdot \exp(\pm V t \sqrt{\Delta}) \varphi(x, y)$; insbesondere wird die zu der Anfangsbedingung $\varphi(x, y, 0) = 0$, $\varphi_t(x, y, 0) = f(x, y)$ gehörige Lösung $W(x, y, t) = \frac{1}{V \sqrt{\Delta}} \mathfrak{S} \sin(V t \sqrt{\Delta}) f(x, y)$. Da man f nach (1) dar-

stellen kann und der Operator $\sqrt{\Delta}$ für den Kern $J_0(rR)$ den Eigenwert ir hat, so läßt sich der Ausdruck für W „deuten“ und führt zu der (richtigen) Lösung

$$W = \frac{t}{2\pi} \int_0^1 \frac{\varrho d\varrho}{\sqrt{1-\varrho^2}} \int_0^{2\pi} f(x + Vt\varrho \cos \vartheta, y + Vt\varrho \sin \vartheta) d\vartheta. \text{ Andere Anfangsbedingungen sind ähnlich zu befriedigen. — Auch für drei Dimensionen gelingt es dem Verf., eine Lösung anzugeben, und ferner schreibt er unbestimmte Integrale elliptischer Differentialgleichungen in zwei Veränderlichen an. } \textit{Bödewadt (Brunoy).}$$

Pignedoli, Antonio: Sugli autovalori di alcune equazioni differenziali della fisica matematica. Atti Sem. mat. fis. Univ., Modena **3**, 265—287 (1949).

L'A. si propone di stabilire delle limitazioni per gli autovalori dell'equazione di Helmholtz $\Delta u + \lambda u = 0$ in tre variabili e dell'equazione delle vibrazioni di una membrana $\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u$ con condizioni al contorno del tipo $\alpha \frac{du}{dn} + \beta u = 0$.

A problemi di questo tipo si è per es. condotti nello studio della propagazione di onde elettromagnetiche in un dielettrico interno ad un tubo conduttore o anche non perfettamente conduttore.

G. Lampariello (Messina).

Pignedoli, Antonio: Frequenze di vibrazione di una membrana elastica a contorno epicycloidale fisso. Ann. Mat. pura appl., Bologna, IV. S. **30**, 291—307 (1949).

Verf. behandelt den Fall einer am Rand eingespannten harmonisch schwingenden Membran, wobei der Rand die Form einer Epizykloide

$$x = n \cos \theta + a \cos n \theta, \quad y = n \sin \theta + a \sin n \theta$$

besitzt mit ganzzahligem $n > 1$ und $0 \leq a < 1$. Durch eine bekannte Transformation reduziert sich das Problem auf die Bestimmung der Eigenwerte der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \mu^2 n^2 \{1 + a^2 r^{2(n-1)} + 2ar^{n-1} \cos(n-1)\theta\} u = 0$$

unter der Bedingung $u(1, \theta) = 0$. Die Eigenlösungen werden in Form einer Fourierreihe

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2} u_0(r) + \sum_{k=1}^{\infty} \{u_k(r) \cos k\theta + v_k(r) \sin k\theta\}$$

angesetzt und für die $u_0(r)$, $u_k(r)$, $v_k(r)$, die als Verallgemeinerungen der Besselschen Funktionen gelten können, ein System von unendlich vielen linearen Differentialgleichungen aufgestellt. Verf. untersucht die sich daraus in erster und in zweiter Näherung ergebenden endlichen Differentialgleichungssysteme und gibt allgemeine Lösungen in Form von Potenzreihen nach r .

M. J. de Schwarz (Roma).

Trjitzinsky, W. J.: Multidimensional principal integrals, boundary value problems and integral equations. Acta math., København **84**, 1—128 (1950).

Verf. stellt sich die Aufgabe, die durch die singulären Integrale

$$\Psi(t) = \int_{\tilde{S}} \frac{k(y, t)}{r^2(y, t)} q(y) d\sigma(y) \quad \text{bzw.} \quad \Psi(x) = \int_{\tilde{S}} \frac{k(y, x)}{r^2(y, x)} q(y) d\sigma(y)$$

erklärten Funktionen auf ihre Eigenschaften hin zu untersuchen und damit zusammenhängende Randwertprobleme und Integralgleichungen zu behandeln. Hierbei bezeichnet S eine endliche Anzahl im dreidimensionalen Raum gelegener, stetig gekrümmter Flächen, die — und das ist wesentlich — nicht notwendig geschlossen sind, $C(S)$ deren Komplement; $y = (y_1, y_2, y_3)$, $t = (t_1, t_2, t_3)$ sind Punkte auf S , $x = (x_1, x_2, x_3)$ liegt in $C(S)$, $r(y, t)$ bzw. $r(y, x)$ sind die Abstände des Punktes y von t bzw. x . Bei diesen Untersuchungen bietet das Verhalten der Funktionen $\Psi(t)$ und $\Psi(x)$ im Falle offener Flächenstücke S in der Nähe der Randkurven β (endlich viele einfach geschlossene Kurven) naturgemäß besondere Schwierigkeiten dar. —

Nach Präzisierung einiger weiterer Voraussetzungen über S wird angenommen, daß in der Nähe von β $|q(y)| \leq \text{const } l^{-\alpha}(y)$ [$0 \leq \alpha < 1$, $l(y)$ Abstand des Punktes y von β] und daß $k(y, x)$ von der Gestalt $k(y, x) = \sum_{m=1}^{\infty} k_m(y, x)$ mit

$$k_m(y, x) = \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^3 \gamma_{i_1, i_2, \dots, i_m}(y) w_{i_1}(y, x) \cdots w_{i_m}(y, x),$$

$w_i = (y_i - x_i)/r(y, x)$ ist. Gilt dann (nebst einigen weiteren Voraussetzungen) $|\gamma_{i_1 \dots i_m}(y) - \gamma_{i_1 \dots i_m}(t)| \leq \lambda_m \gamma(y, t) r^h(y, t)$ [$0 < h \leq 1$, h unabhängig von m , $\gamma(y, t) > 0$ und beschränkt für $l(y) \geq \delta$, $l(t) \geq \delta$ ($\delta > 0$)] und existiert das Integral $\int_S \gamma(y, t) q(y) d\sigma(y)$, so existiert $\Psi(t)$, wenn t auf S , aber nicht auf β liegt, im Sinne des Cauchyschen Hauptwertes. Rückt ferner x aus $C(S)$ längs der Richtung λ_t (nicht tangential) gegen t auf S (nicht auf β), so gilt $\lim_{x \rightarrow t} \Psi(x) = q(t) K(t) + \Psi(t)$;

$K(t)$ ist dabei eine wohlbestimmte, im allgemeinen von λ_t , aber nicht von $q(t)$ abhängige Funktion. Bei Annäherung von x an einen Punkt c auf β (nicht tangential) zu S und zu β) verhält sich $\Psi(x)$ wie $r^{-\alpha}(c, x)$ ($0 < \alpha < 1$) bzw. wie $\log(1/r(c, x))$ ($\alpha = 0$). Ist weiter $\gamma(y, t) < \text{const}$. [$\text{Min}(l(y), l(t))$] $^{-\beta}$ ($\beta \geq 0$, $\alpha + \beta < 1$), so verhält sich bei Annäherung von t auf S an c (nicht tangential zu β) $\Psi(t)$ wie $r^{-\lambda}(c, t)$ bzw. $r^{-\lambda}(c, t) \log(1/r(c, x))$ ($0 \leq \lambda < 1$), je nach den Werten der Konstanten h, α, β (λ von h, α, β abhängig). — Es folgt dann eine kurze Betrachtung über das Kurvenpotential $K(x) = \int_{\beta} \frac{k(y)}{r(x, y)} ds(y)$ [x nicht auf β , $k(y)$ Hölder-stetig], das bei (nicht tangentialer) Annäherung von x an einen Punkt c von β wie $\log(1/r(c, x))$ wächst. Im Zusammenhang hiermit wird folgende Aufgabe behandelt: Gesucht ist eine Funktion $\gamma(x)$, reell und harmonisch für alle nicht auf β gelegenen x mit $\gamma(\infty) = 0$, die in der Nachbarschaft von β den Beziehungen

$$-\gamma(t) - f(t) \log(1/r(c, t)) \leq c^*, \quad \gamma(t) + f(t) \log(1/r(c, t)) \leq c^* + \nu \log(1/r(c, t))$$

[$0 \leq \nu < 1$, $f(t)$ gegebene Funktion] genügt. — Sodann geht Verf. auf folgendes Randwertproblem ein: Es sind Klassen von Funktionen $\Phi(x)$ in $C(S)$ zu finden, für die bei Annäherung von x an t auf S Beziehungen der Art

$$\Phi^{(\nu)}(t) = A(t) \Phi^{(\nu)}(t) + B(t)$$

gelten [$A(t) \neq 0$, $B(t)$ gegebene Funktionen auf S , $\Phi^{(\nu)}(t)$ bzw. $\Phi^{(\nu')}(t)$ Grenzwerte von $\Phi(x)$ für $x \rightarrow t$ längs der Richtung L'_t bzw. L''_t]. Es werden hinreichende Lösbarkeitsbedingungen angegeben und Aussagen über die Gestalt der Lösungen gemacht, die in Zusammenhang mit den Integralen $\Psi(x)$ stehen. — Schließlich werden noch singuläre Integralgleichungen der Gestalt

$$a(t) u(t) + \int_S \frac{k(y, t)}{r^2(y, t)} u(y) d\sigma(y) + T(u|t) = f(t)$$

betrachtet [$u(t)$ gesuchte Funktion, $T(u|t)$ ein Integraloperator, der im wesentlichen einer Fredholmschen Integralgleichung entspricht, $a(t)$ (Hölder-stetig) und $f(t)$ bekannte Funktionen]. Es gelingt, einen Integraloperator zu finden, dessen Anwendung auf die vorgelegte Integralgleichung unter gewissen Voraussetzungen über das Verhalten von f, a und T in der Nähe von β diese in eine reguläre Fredholmsche Integralgleichung überführt. Der wesentliche Fortschritt gegenüber früheren Arbeiten [z. B. S. G. Michlin, Singular integral equations, Uspechi mat. Nauk. 3, Nr. 3 (25) 29—112 (1948)] ist die Bewältigung der durch das Vorhandensein von Randkurven β auftretenden Schwierigkeiten. Maruhn (Dresden).

Carrier, G. F.: A generalization of the Wiener-Hopf technique. Quart. appl. Math. 7, 105—109 (1949).

L'A. indica una generalizzazione dell'algoritmo di Wiener-Hopf per il tratta-

mento di equazioni integrali il cui nucleo è una funzione di Green di un problema al contorno relativo all'equazione a derivate parziali $\varphi_{yy} + y^m (\varphi_{xx} + k^2 \varphi) = 0$ dove m è un numero intero positivo. *G. Lampariello* (Messina).

Schubert, Hans: Über ein gemischtes räumliches Randwertproblem der Potentialtheorie. *Z. angew. Math. Mech.* 30, 267—268 (1950).

Integralgleichungen. Integraltransformationen:

Parodi, Maurice: Sur une propriété des équations intégrales de Volterra à n variables. *C. r. Acad. Sci., Paris* 230, 2252—2253 (1950).

Si determina la relazione che intercorre fra la soluzione di un'equazione integrale di Volterra in n variabili il cui termine noto è generico e la soluzione della equazione integrale che si ottiene dalla precedente prendendo il termine noto di forma particolare. *C. Miranda* (Napoli).

Kahan, Théo: Une méthode variationnelle propre à l'étude de l'équation des ondes. *Rev. sci., Paris* 87, 205—211 (1949).

Es wird ein neues Verfahren zur praktischen Lösung von Randwertproblemen der Wellengleichung vorgeschlagen. Man geht aus von der bekannten Formulierung des Problems als Integralgleichung 1. Art

$$\int G(x, y) \varrho(y) d\sigma_y + V(x) = 0,$$

wo $V(x)$ die vorgegebenen Randwerte, $G(x, y)$ die Greensche Funktion der Wellengleichung für den gesamten Raum, $\varrho(y)$ die unbekannte Quellendichte auf dem Rand bedeutet, welche das gesuchte Feld erzeugt, und das Integral über den Rand zu erstrecken ist. Aus einer beliebigen Funktion $f_0(x)$ auf dem Rand werden deren „Momente“

$$f_i(x) \equiv \int G(x, y) f_{i-1}(y) d\sigma_y \quad (i = 1, 2, \dots)$$

gebildet und gezeigt, daß in $\varrho_n(x) = \sum_0^n a_n f_n(x)$ die Koeffizienten, welche die beste Approximation ergeben, durch ein leicht zu handhabendes Minimumprinzip, welches auf nur lineare Gleichungen führt, bestimmt sind. — Die Methode hat eine gewisse Verwandtschaft mit dem bekannten Ritzschen Verfahren, das zum Vergleich ebenfalls dargelegt wird, ohne jedoch mit ihm identisch zu sein. Andererseits besteht eine gewisse Analogie mit der Robinschen Lösung einer Integralgleichung im Problem der Elektrizitätsverteilung auf Leitern [*Ann. sci. École norm. sup.*, III. S., Suppl. 3—58 (1886)], die ebenfalls kurz ausgeführt wird. *Schafroth* (Zürich).

Good, I. J.: Bounded integral transforms. II. *Quart. J. Math. (Oxford II. Ser.)* 1, 185—190 (1950).

Die Arbeit ist eine Fortsetzung von I. J. Good und G. E. H. Reuter (dies. Zbl. 32, 73) und benutzt die dortigen Bezeichnungen und Definitionen. — Der Kern φ einer linearen beschränkten Transformation T heiße ein Standardkern: der Standardkern, der zu $T_2(T_1)$ Veranlassung gibt, werde mit $\varphi_2 \cdot \varphi_1$ bezeichnet. Dann gilt: Theorem VI. Sind φ und ψ Standardkerne, so wird der Standardkern $\psi \cdot \varphi$ durch $\int_0^x \psi \cdot \varphi(y, t) dt = \int_0^\infty \psi(y, t) \varphi^*(x, t) dt$ gegeben ($x, y \geq 0$). Dieser Satz enthält Theorem V der früheren Arbeit. Theorem VII. Die Funktion $\varphi(x, t)$ ist dann und nur dann ein Standardkern, wenn es einen Standardkern Φ gibt derart, daß $\int_0^\infty \varphi(x, t) \varphi(y, t) dt = \int_0^x \Phi(y, t) dt$. T_Φ ist selbstadjungiert. — Zum Schluß wird ein Iterationsprozeß zur Bestimmung der Umkehrung einer beschränkten linearen Transformation angegeben, der analog zur Bestimmung der Reziproken einer Matrix ohne Benutzung der Division ist. *Doetsch* (Freiburg i. Br.).

Fox, C.: Chain transforms. J. London math. Soc. **23**, 229—235 (1949).

Gewisse auf die Fouriersche Abbildung (F. A.) bezügliche, von Hardy und Titchmarsh herrührende Gedankengänge lassen sich auf wiederholte Abbildungen ausdehnen, die zunächst bei gerader Anzahl n die Gestalt haben

$$(1) \quad g_\beta(x) = \int_0^\infty g_{\beta-1}(u) k_{\beta-1}(ux) du, \quad \beta = 2, \dots, n; \quad (2) \quad g_1(x) = \int_0^\infty g_n(u) k_n(ux) du.$$

Für $n = 2$ zieht sich dieser Ansatz auf die F. A. zurück. — Die Gesamtheit vorstehender Gleichungen (1), (2) nennt Verf. eine T -Kette, die Funktionen $k_\alpha(x)$ ($\alpha = 1, \dots, n$) Kerne und ihren Inbegriff eine K -Kette. Als starkes Hilfsmittel dient ihm die Mellinsche (M.) A. und ihre Umkehrung. Wenn die M-Bilder $K_\alpha(s)$ der $k_\alpha(x)$ die Beziehung $\prod_{\gamma=1}^{n/2} K_{2\gamma-1}(s) K_{2\gamma}(1-s) = 1$ erfüllen, kommt im allgemeinen eine T -Kette zustande. Ein Beispiel einer sechsgliedrigen K -Kette bieten die Kerne

$k_1(x) = k_4(x) = (2/\pi)^{1/2} \sin x$, $k_2(x) = k_5(x) = (2/\pi)^{1/2} \cos x$, $k_3(x) = k_6(x) = x^{1/2} J_0(x)$ dar. Zweites Beispiel: eine aus Besselschen Funktionen gebildete m -gliedrige Kette. — Bei ungeraden n stellen sich nach geeigneter Abwandlung von (2) die Seitenstücke zu den Ergebnissen des geraden Falles ein. — Eine Kette läßt sich durch Einfügen passender Zwischenglieder zu vorgeschriebener Länge ausweiten. Aus zwei Ketten entspringt eine neue [in der ersten der Formeln (21) scheint ein Irrtum unterlaufen]. — Parsevals Formel kann man auf mehrere Arten verallgemeinern, von denen eine hier wiedergegeben sei: Ist $p_m(x)$ das mit $k_m(x)$ erzeugte Bild von $g_{m+1}(x)$, dann gilt, sei n gerade oder ungerade,

$$\int_0^\infty g_m(x) p_m(x) dx = \int_0^\infty \{g_{m+1}(x)\}^2 dx \quad (m = 1, \dots, n), \text{ wo } g_{n+1}(x) = g_1(x).$$

L. Koschmieder (Tucumán).

Duffin, R. J.: Representation of Fourier integrals as sums. II. Proc. Amer. math. Soc. **1**, 250—255 (1950).

Einer Funktion $\varphi(x)$ werden die Summen zugeordnet:

$$(1) \quad f(x) = \sum_1^\infty \frac{1}{n} \sin\left(\frac{1}{2} \pi n\right) \varphi\left(\frac{x}{n}\right), \quad (2) \quad g(x) = \sum_1^\infty \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{2} \pi n\right) \varphi\left(\frac{n}{x}\right).$$

Unter gewissen Bedingungen für φ ist dann:

$$(3) \quad g(x) = \int_0^\infty \sin\left(\frac{1}{2} \pi x t\right) f(t) dt, \quad (4) \quad f(x) = \int_0^\infty \sin\left(\frac{1}{2} \pi x t\right) g(t) dt.$$

In der vorangehenden Arbeit [Bull. Amer. math. Soc. **51**, 447—455 (1945)] durfte φ verschiedene Typen von Unstetigkeiten haben. In den Sätzen der vorliegenden Note muß φ differenzierbar oder sogar in einem Sektor analytisch sein, dafür sind aber die Wachstumsbeschränkungen bei 0 und ∞ weniger scharf. Es gilt z. B.: $\varphi'(x)$ sei in $(1, \infty)$ vorhanden und von beschränkter Variation, ferner sei $\varphi'(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \infty$. $\Phi(x) = x^{-1} \varphi(x^{-1})$ erfülle dieselben Bedingungen. Dann sind die Reihen (1) und (2) für $x > 0$ C_1 -summierbar und erfüllen die Gleichungen (3) und (4). Die Integrale sind bei ∞ C_1 -summierbar und bei 0 uneigentlich integrierbar.

Doetsch (Freiburg i. Br.).

Rabinovič, Ju. L.: Umkehrformeln für zwei Formen der Laplacetransformation. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **60**, 969—972 (1948) [Russisch].

Si considerano delle trasformazioni integrali del tipo

$$(1) \quad \varphi(z) = \oint_C e^{-z\xi} f(\xi) d\xi$$

operanti su funzioni analitiche polidrome di tipo esponenziale, per le quali $\xi = \infty$ è un punto singolare isolato. Assumendo come curva C un conveniente circuito tracciato sulla

superficie di Riemann della f , si determinano le regioni di convergenza di tali trasformazioni e si stabiliscono varie formule di inversione della (1). *C. Miranda.*

Bose, S. K.: Certain properties of the generalized Laplace transform. J. Indian math. Soc., n. S. 14, 29—34 (1950).

Unter der verallgemeinerten Laplace-Transformation versteht der Verf. die „Whittaker-Transformation“

$$\varphi(p) = p \int_0^\infty (2x p)^{-\frac{1}{2}} W_{k,m}(2p x) f(x) dx,$$

die für $k = \frac{1}{4}$, $m = \pm \frac{1}{4}$ in die gewöhnliche (mit p multiplizierte) Laplace-Transformation übergeht. Es werden Sätze bewiesen wie der folgende: Im Falle $k = n/2 + \frac{1}{4}$, $m = \pm \frac{1}{4}$ werde φ mit φ_n bezeichnet; die gewöhnliche Laplace-Transformierte von $x^{-\frac{1}{2}} f(x)$ heiße $\psi(p)$. Dann gilt für $\Re p > 0$, $\Re \mu > -\frac{1}{2}$, $f(x) = O(x^\mu)$ für $x \rightarrow 0$, $f(x) = o(x^{-\frac{1}{2}} e^{px})$ für $x \rightarrow \infty$ und stetiges $f(x)$:

$$2\sqrt{2p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} n!}{(2n+1)!} \varphi_{2n+1}(p) = \psi(p).$$

Die Sätze werden auf verschiedene spezielle Beispiele angewendet. *Doetsch.*

Bose, S. K.: Some properties of the Whittaker transform. Bull. Calcutta math. Soc. 42, 43—48 (1950).

Die in der Überschrift genannte Abbildung $\mathfrak{W}_{k,m}$ hat Verf. a. a. O. 41, 9—27, 59—67, 68—76 (1949) eingehend untersucht; vgl. die Besprechung in dies. Zbl. 36, 349, 350, deren Bezeichnungen hier benutzt sind. In der vorliegenden Arbeit gibt Verf. einige neue Eigenschaften der $\mathfrak{W}_{k,m}$ an, die im Sonderfalle der Laplaceschen Abbildung $\mathfrak{L} = \mathfrak{W}_{1/4, \pm 1/4}$ nicht ihresgleichen haben, — deswegen nicht, weil in ihrer Fassung Abbildungen mit Zeigern verschiedenen Wertes vorkommen. Einige der sechs, auch mit Beispielen versehenen, Sätze des Verf. seien wiedergegeben: Ist $\varphi_r(p) \stackrel{k+\tau}{m} f(x)$, so

$$\sum_{r=0}^{\infty} (1/r!) (1/\alpha - 1)^r \varphi_r(p) = p \alpha^k \int_0^\infty (2p x)^{-1/4} e^{xp(1-\alpha)} W_{k,m}(2\alpha p x) f(x) dx,$$

wenn $\Re(\mu \pm m + 5/4) > 0$, wo $f(x) = O(x^\mu)$ bei kleinem x , $\alpha > 1/2$ und $x^{-1/4} W_{k,m}(2p_0 x) f(x)$ für $x \geq 0$ beschränkt, $\Re[(2\alpha - 1)p] > p_0 > 0$ ist und die Reihe links gleichmäßig konvergiert. Es folgen drei weitere ähnliche Ergebnisse. Von etwas anderer Art, nämlich eine Rücklaufsformel in bezug auf einen willkürlichen Parameter λ , ist Satz V: Aus $\varphi_{n,\lambda}(p) \stackrel{n/2+1/4}{\pm 1/4} x^{-\lambda} f(x)$ folgt

$$\varphi_{n+1,\lambda}(p) = (2p)^{1/2} \varphi_{n,\lambda-1/2}(p) - (n/2) \varphi_{n-1,\lambda}(p),$$

wenn $\Re(\mu - \lambda + 1) > 0$, wo $f(x) = O(x^\mu)$ bei kleinem x und $\Re p > p_0 > 0$. — Beispiel: $f(x) = x^x e^{-q \cdot x}$. — Ähnlich Satz VI. *L. Koschmieder* (Tucumán).

Pollard, Harry: Note on the kernel $\exp(-|x-y|)$. Quart. appl. Math. 7, 473 (1950).

Riferendosi ad una Nota di H. P. Thielman (cfr. questo Zbl. 32, 72) l'A. enuncia il seguente Teorema. Affinché la funzione $f(x)$ sia esprimibile nella forma integrale

$$f(x) = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-|x-y|} g(y) dy, \quad x \geq 0,$$

dove $g(y)$ è una funzione assegnata integrabile su ogni intervallo finito, è necessario e sufficiente che la $f'(x)$ esista e sia assolutamente continua su ogni intervallo finito e che siano soddisfatte inoltre le condizioni seguenti: a) $f(0) = f'(0)$; b) $g(x) = f(x) - f''(x)$ per quasi tutti i valori positivi di x ; c) $f'(x) = o(e^x)$, $x \rightarrow \infty$. Si osserverà che il teorema rimane valido se si sopprimono contemporaneamente la parola „assegnata“ e la condizione b).

G. Lampariello (Messina).

Hartman, Philip and Aurel Wintner: On Euler transforms. Proc. Amer. math. Soc. 1, 394—396 (1950).

$E_\lambda, \lambda > 0$, sei die Menge aller Funktionen $\Phi_\lambda(x) = \int_0^\infty (x+t)^{-\lambda} d\Phi(t)$, $\Phi(t)$ eine nichtkonstante Funktion mit $d\Phi(x) \geq 0$ für $0 \leq x < \infty$. Es wird bewiesen, daß für $\lambda < \mu$ E_λ echter Teilraum von E_μ ist und daß der Vereinigungsraum E_∞ der E_λ im Sinne der Helly'schen Konvergenz dicht im Raum aller in $0 < x < \infty$ vollständig monotonen Funktionen ist.

G. Köthe (Mainz).

Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:

Nachbin, Leopoldo: On strictly minimal topological division rings. Bull. Amer. math. Soc. 55, 1128—1136 (1949).

Soit K un corps topologique, \mathcal{T} sa topologie; on dit que K est minimal (resp. strictement minimal) s'il n'existe pas de topologie compatible avec la structure de K (resp. avec la structure d'espace vectoriel sur K de K_s) strictement moins fine que \mathcal{T} . Si K est strictement minimal, il est minimal; si K n'est pas discret et si, dans K , tout ensemble A , tel que 0 ne soit pas adhérent à $A - 0$, est borné, K est strictement minimal. L'A. généralise à des espaces vectoriels sur un corps strictement minimal K des propriétés classiques dans le cas des espaces sur \mathbf{R} ou \mathbf{C} . Soit E un espace vectoriel topologique sur un corps strictement minimal K . Pour qu'une application linéaire de rang 1 dans un espace F soit continue, il faut et il suffit que son noyau ou son graphe soient fermés; si H est un hyperplan de E , pour que E soit produit de H et d'un supplémentaire de H (munis de la topologie induite par celle de E), il faut et il suffit que H soit fermé; il n'y a qu'une topologie sur K_s^n telle que tout hyperplan soit fermé. Pour qu'il n'y ait qu'une topologie compatible avec la structure de K_s^n , il faut et il suffit que K soit complet; pour que tout automorphisme d'un K_s^n soit continu, il faut et il suffit que K soit complet. Supposons maintenant K complet: pour qu'une application linéaire de rang fini de E dans un espace F soit continue, il faut et il suffit que son noyau ou son graphe soient fermés; si F est un sous-espace de dimension finie et G un sous-espace fermé de E , $F + G$ est fermé.

Jean Braconnier (Lyon).

Rickart, C. E.: The uniqueness of norm problem in Banach algebras. Ann. math., Princeton, II. S. 51, 615—628 (1950).

Soit B une algèbre normée complète sur le corps réel ou complexe; soit $\|x\|$ la norme donnée dans B ; il peut évidemment arriver que, à une équivalence près, $\|x\|$ soit la seule norme qui fasse de B une algèbre normée ($\|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$) complète; le but de l'A. est de donner des critères pour qu'il en soit ainsi [c'est par exemple le cas si B est semi-simple et commutative; cf. I. E. Gelfand, Mat. Sbornik, n. S. 9, 1—23 (1941)]. — Les résultats principaux sont les suivantes: a) soit $\|x\|_1$ une autre norme sur B (telle que B soit encore une algèbre normée complète); soit S l'ensemble des $s \in B$ tels qu'il existe une suite x_n avec

$$\lim \|s - x_n\| = 0, \quad \lim \|x_n\|_1 = 0;$$

alors S est un idéal bilatère, fermé pour les deux normes considérées, et tout $s \in S$ est, pour chaque norme, un diviseur de zéro généralisé (d'où bien entendu le résultat de Gelfand); de là résulte aussi l'unicité de la norme, dans le cas non commutatif, si B est fortement semi-simple (i. e. si l'intersection de ses idéaux bilatères maximaux est 0); pour les algèbres faiblement semi-simple (i. e. si l'intersection des idéaux à gauche maximaux est 0), le problème de l'unicité de la norme se laisse réduire au cas où B est une algèbre algébriquement irréductible d'opérateurs continus d'un espace de Banach; b) la norme de B est encore unique si B possède „suffisamment“ d'idéaux à gauche minimaux, ce qui est par exemple le cas si B est l'algèbre de tous

les opérateurs continus d'un espace de Banach; c) supposons définie sur B un anti-automorphisme involutif $x \rightarrow x^*$ et une norme „auxiliaire“ $|x|$ telle que $|xy| \leq |x| \cdot |y|$, $|x|^2 \leq k \cdot |xx^*|$ où k est une constante (c'est par exemple le cas si B possède une représentation unitaire fidèle); alors la norme $|x|$ de B est unique.

R. Godement (Nancy).

Rickart, C. E.: Isomorphic groups of linear transformations. Amer. J. Math. 72, 451—464 (1950).

Soit E un espace vectoriel à gauche sur un corps K (commutatif ou non), E' un sous-espace du dual E^* de E (espace vectoriel à droite sur K) tel que $\langle x, x' \rangle = 0$ pour tout $x' \in E'$ entraîne $x = 0$, de sorte que E puisse être considéré comme sous-espace du dual de E' ; la topologie $\sigma(E, E')$ sur E est alors la topologie de la convergence simple dans E' , qui est séparée (L'A. dit seulement que c'est une topologie satisfaisant à l'axiome T_1). Soit G un groupe d'automorphismes bicontinus de E , contenant toutes les involutions U de E telles que le sous-espace de E formé des x satisfaisant à $Ux = -x$ soit de dimension 1 (involutions minimales). Soit E_1 un second espace, muni d'une topologie analogue $\sigma(E_1, E'_1)$, et G_1 un groupe d'automorphismes bicontinus de E_1 contenant toutes les involutions minimales. Généralisant des résultats de G. Mackey [Ann. Math., Princeton, II. S. 43, 244—260 (1942)] et du Réf. (ce Zbl. 29, 6), l'A. montre que si G et G_1 sont isomorphes, pour tout isomorphisme φ de G sur G_1 il existe un semi-isomorphisme continu g de E sur E_1 (relatif à un isomorphisme de K sur K_1), ou un semi-isomorphisme continu h de E sur E'_1 (relatif à un isomorphisme de K sur l'opposé de K_1) tel que φ soit de la forme $\varphi(u) = \chi(u) \cdot g u g^{-1}$ ou $\varphi(u) = \chi(u) \cdot h^* (u^*)^{-1} (h^*)^{-1}$, u^* et h^* désignant les transposés de u et h , et $u \rightarrow \chi(u)$ un homomorphisme de G dans le centre de K_1 . La méthode employée est analogue à celle de Mackey (loc. cit.): elle consiste à caractériser les sous-espaces de dimension 1 de E en caractérisant la famille des involutions minimales dans G qui correspondent à ce sous-espace. *J. Dieudonné (Nancy).*

Dieudonné, Jean: On topological groups of homeomorphisms. Amer. J. Math. 70, 659—680 (1948).

Soit E un espace uniforme. Dans la première partie de ce travail l'A. étudie certaines topologies et structures uniformes [de convergence uniforme, compacte ou simple; cf. N. Bourbaki, *Eléments de Mathématique*, Livre II, Ch. X, Paris (1949)] sur des groupes d'homéomorphismes de E . Il montre, en particulier, que la topologie de convergence uniforme est compatible avec la structure du groupe G^* des homéomorphismes uniformément continus de E et que, si E est complet, G^* est complet pour la structure uniforme bilatère déduite de cette topologie; que, si E est localement compact et localement connexe, la topologie de convergence compacte est compatible avec la structure du groupe G de tous les homéomorphismes de E et que G est complet pour la structure uniforme bilatère déduite de cette topologie; il étudie enfin certains groupes d'homéomorphismes d'un espace métrique, munis de la topologie de convergence uniforme sur les bornés. Dans la seconde partie, l'A. étudie les groupes équicontinus d'homéomorphismes de E ; sur un tel groupe G , les topologies de convergence simple et de convergence compacte coïncident et sont compatibles avec la structure de groupe de G ; on peut alors comparer diverses structures uniformes sur G . En utilisant la notion d'équi-continuité, on peut étudier les groupes localement compacts d'homéomorphismes de E : l'A. démontre le résultat suivant: soit G un groupe de permutations de E , contenu dans \mathfrak{R}_c (ensemble des applications de E dans E , continues sur tout compact, muni de la topologie de convergence compacte); s'il existe dans G un voisinage symétrique H de l'identité relativement compact, alors les topologies de convergence simple et de convergence compacte sont identiques sur G et compatibles avec la structure de groupe de G ; G admet un groupe complété \bar{G} , localement compact,

formé de permutations de \mathfrak{K}_c et l'adhérence de H dans \mathfrak{K}_c est un voisinage compact de l'identité dans G . Les hypothèses de ce théorème sont vérifiées lorsque E est localement compact et connexe et muni d'une structure uniforme telle que E soit complet et que G possède un voisinage symétrique H_0 de l'identité équi-continu, ou bien telle que G possède un voisinage symétrique H_0 de l'identité uniformément équicontinu. L'A. termine par quelques remarques sur les groupes de Lie d'homéomorphismes d'une variété analytique. Ce travail, qui constitue une utile mise au point d'un assez grand nombre de résultats d'origines diverses, est illustré par des exemples et complété d'une bibliographie. *J. Braconnier*.

Fort jr., M. K.: A note on equicontinuity. *Bull. Amer. math. Soc.* 55, 1098—1100 (1949).

Diese Arbeit schließt sich an eine Arbeit von W. H. Gottschalk (dies. Zbl. 34, 254) an. Verf. beweist: Es sei F eine Menge von Funktionen, die den kompakten metrischen Raum X stetig in X abbilden. G sei eine Menge von stetigen Funktionen, die X in den kompakten metrischen Raum Y abbilden. Zu jedem $f \in F$ gebe es eine stetige Funktion f^* , die Y in Y abbildet, derart, daß für alle $g \in G$ gilt: $g = f^* \circ g \circ f$. Wenn F algebraisch transitiv ist [d. h. für zwei beliebige Punkte p und q aus X gibt es $f \in F$, so daß $f(p) = q$ ist], so ist G gleichgradig stetig. Aus diesem Satze folgen: 1. Wenn F eine algebraisch transitive Gruppe von Homöomorphismen des kompakten metrischen Raumes X auf X ist, und wenn G eine Gruppe von Homöomorphismen von X auf X ist, derart, daß für alle $f \in F$ und $g \in G$ gilt $f \circ g = g \circ f$, so ist G gleichgradig stetig. 2. Es sei F eine algebraisch transitive Gruppe von Homöomorphismen des kompakten metrischen Raumes X auf X . Dann ist das Zentrum von F gleichgradig stetig. *Thimm (Bonn)*.

Nagao, Hirosi: On the topologies of homeomorphism groups of topological spaces. *Osaka math. J.* 1, 43—48 (1949).

L'A. redonne la définition de la topologie sur le groupe G des homéomorphismes d'un espace localement compact E , dans laquelle un système fondamental de voisinages de l'identité est formé par les ensembles $V(A, U)$ des $u \in G$ tels que $u(x) \in U(x)$ et $u^{-1}(x) \in U(x)$ si $x \in A$ (A compact de E , U entourage dans une structure uniforme sur E) [cf. J. Braconnier et J. Colmez, C. r. Acad. Sci., Paris 223, 230—232 (1946)]. *J. Braconnier (Lyon)*.

Banach, S.: Remarques sur les groupes et les corps métriques. *Studia math.* 10, 178—181 (1948).

Eine Gruppe E sei ein vollständiger metrischer Raum mit der Metrik $\rho(x, y)$. Es gelte ferner: 1. aus $\lim x_n = x$ folgt $\lim x_n y = x y$, 2. aus $\lim x_n = x$ und $\lim x^{-1} = v$ folgt $x = v^{-1}$. Dann gilt: 3. aus $\lim x_n = x$ folgt $\lim x_n^{-1} = x^{-1}$. — In einem vollständigen metrischen Raum E mit Metrik $\rho(x, y)$ sei eine assoziative Multiplikation erklärt und ein Einheitsselement 1 vorhanden. Es gelte ferner: 4. aus $\lim x_n = x$ und $\lim y_n = y$ folgt $\lim x_n y_n = x y$. Es sei E^* die Gesamtheit aller Elemente von E , deren inverse Elemente in E existieren. Dann ist die Funktion $f(x) = x^{-1}$ in E dann und nur dann stetig, wenn die Menge E^* eine G_δ -Menge ist. *D. A. Kappos (Erlangen)*.

Myers, S. B.: Normed linear spaces of continuous functions. *Bull. Amer. math. Soc.* 56, 233—241 (1950).

Dies ist im wesentlichen ein Bericht über frühere Resultate des Verf. (dies. Zbl. 29, 304; 33, 283) und verwandte Arbeiten. Neu sind vor allem einige instruktive Beispiele für den Fall eines nichtkompakten Raumes X , welche eine Typeneinteilung der Banachschen Räume hinsichtlich ihrer Darstellbarkeit als Funktionenräume $B(X)$ als echt erweisen. *G. Köthe (Mainz)*.

Dilworth, R. P.: The normal completion of the lattice of continuous functions. *Trans. Amer. math. Soc.* 68, 427—438 (1950).

Etant donné un ensemble ordonné P , un sous-ensemble S de P est dit normal si S contient tous les majorants de l'ensemble des minorants de S dans P . L'ensemble des parties normales de P forme, comme il est bien connu (G. Birkhoff, Lattice theory, 2^e éd.; ce Zbl. 33, 101) un ensemble ordonné (par induction) P où toute partie majorée admet une borne supérieure, et dont P peut être considéré comme sous-ensemble; \bar{P} est la complétion normale de P . L'A. se propose de déterminer \bar{P} lorsque $P = C(E)$ est l'ensemble des fonctions continues et bornées dans un espace complètement régulier E . Pour toute fonction numérique φ bornée dans E , l'A. désigne par φ^* la fonction définie par $\varphi^*(x) = \limsup_{y \rightarrow x} \varphi(y)$, par φ_* la fonction définie par $\varphi_*(x) = \liminf_{y \rightarrow x} \varphi(y)$, qui sont respectivement semi-continue supérieurement et semi-continue inférieurement; il dit qu'une fonction bornée φ est normale si $(\varphi_*)^* = \varphi$, et montre que \bar{P} est isomorphe à l'ensemble des fonctions normales sur E . Il faut noter que si A est une partie majorée (resp. minorée) de P , sa borne supérieure (resp. inférieure) dans \bar{P} n'est pas son enveloppe supérieure $\sup A$ (resp. son enveloppe inférieure $\inf A$) dans l'ensemble de toutes les fonctions bornées, mais bien $(\sup A)^*$ [resp. $((\inf A)_*)^*$]. Dans une seconde partie, l'A. prouve que \bar{P} est isomorphe à l'ensemble ordonné des fonctions continues dans l'espace booléen (au sens de Stone) associé à l'algèbre booléenne des ensembles ouverts réguliers de E (c'est-à-dire qui sont identiques à l'intérieur de leur adhérence).

J. Dieudonné (Nancy).

Kaplansky, Irving: Lattices of continuous functions. II. Amer. J. Math. 70, 626—634 (1948).

Für Teil I vgl. dies. Zbl. 31, 219. — Es sei X ein kompakter Hausdorffscher Raum, C der lineare Raum der auf X stetigen reellen Funktionen. Durch $\|f\| = \sup |f(x)|$ wird eine Topologie auf C erklärt, durch $f \geq g$, wenn $f(x) \geq g(x)$ für alle $x \in X$, wird C ein Verband. Jeder in beiden Richtungen stetige Verbandsautomorphismus σ von C hat die Form $\sigma(f) = f^*$ mit $f^*(\theta(x)) = \varphi(x, f(x))$, θ ein Homöomorphismus von X , $\varphi(x, \alpha)$ eine in x und α gleichzeitig stetige Funktion, die für jedes x in α streng monoton ist. Es gibt auch unstetige Verbandsautomorphismen; erfüllt X jedoch das 1. Abzählbarkeitsaxiom, so ist jeder Verbandsautomorphismus stetig. Als Folgerung ergibt sich, daß jeder Ringautomorphismus von C durch einen Homöomorphismus von X erzeugt wird. Als Translationsverband wird ein distributiver Verband L bezeichnet, in dem für jedes $a \in L$ und jedes reelle α eine Summe $a + \alpha \in L$ erklärt ist, wobei gilt: $a + 0 = a$; $(a + \alpha) + \beta = a + (\alpha + \beta)$; aus $\alpha > 0$ folgt $a + \alpha > a$; aus $a > b$ folgt $a + \alpha > b + \alpha$; zu $a, b \in L$ existiert stets ein α mit $a + \alpha > b$; ist $a < b + \alpha$ für jedes $\alpha > 0$, so ist $a \leq b$. Jeder Translationsverband ist als solcher isomorph einem Translationsverband C vom folgenden Typ: X sei ein kompakter Hausdorffscher Raum. Zu jedem Paar $x, y \in X$ gibt es reelle Zahlen

$$-\infty \leq \alpha(x, y) < \beta(x, y) \leq \infty,$$

so daß C aus allen reellen auf X stetigen Funktionen $f(x)$ besteht mit

$$\alpha(x, y) \leq f(x) - f(y) \leq \beta(x, y)$$

für alle $x, y \in X$. Verschiedene Bemerkungen über mögliche Verallgemeinerungen dieses Satzes.

G. Köthe (Mainz).

Gelbaum, Bernard R.: Expansions in Banach spaces. Duke math. J. 17, 187—196 (1950).

L'A. étudie des bases de natures diverses dans un espace de Banach E , la convergence des développements pouvant être obtenue par une „méthode de sommation“ vectorielle. Si (x_n) est une base du dual E' de E , et si le système biorthogonal associé (y_n) dans E'' est dans E , (y_n) est une base de E .

Dixmier (Paris).

Graves, Lawrence M.: Some mapping theorems. Duke math. J. 17, 111—114 (1950).

Nach Banach gibt es zu jeder linearen stetigen Abbildung K eines Banachraumes B_1 auf einen Banachraum B_2 ein M , so daß $y \in B_2$ ein Urbild x mit $\|x\| \leq M \|y\|$ hat. Es sei nun G eine für $\|x\| < \gamma$ in B_1 definierte stetige Abbildung von B_1 in B_2 mit $G(0) = 0$. Es wird durch sukzessive Approximationen bewiesen, daß, falls es eine lineare stetige Abbildung K gibt mit

$$\|G(x_1) - G(x_2) - K(x_1 - x_2)\| \leq \delta \|x_1 - x_2\|$$

für $\|x_1\|, \|x_2\| < \gamma$ und ein $\delta < 1/M$, so hat die Gleichung $y = G(x)$ für alle y mit $\|y\| < \gamma(1 - M\delta)/M$ eine Lösung x mit $\|x\| < \gamma$. Ist insbesondere G linear, so hat G ebenfalls ganz B_2 als Bildraum. Es werden eine Verallgemeinerung bewiesen, in der $\|x\| < \gamma$ durch den in $\|x\| < \gamma$ gelegenen Teil eines Kegels mit der Spitze 0 ersetzt wird, und Folgerungen für Abbildungen G gezogen, die ein Differential in der Nähe von 0 besitzen. G. Köthe (Mainz).

Pachale, Helmut: Zur Theorie der Elementfolgen in Banachschen Räumen. Math. Nachr., Berlin 3, 127—141 (1950).

Sei \mathfrak{B} ein komplexer Banachscher Raum mit den Elementen $f, g, \dots, \bar{\mathfrak{B}}$ der konjugierte Raum der in \mathfrak{B} erklärten linear-stetigen Funktionale f, g, \dots . Als Grenzexponent ρ_ζ einer gegen 0 konvergenten Folge komplexer Zahlen $\{\zeta_v\}$ ($v = 1, 2, 3, \dots$) werde bezeichnet $\rho_\zeta = \infty$, falls für alle $\infty > k \geq 0$ $\sum |\zeta_v|^k$ divergiert, $\rho_\zeta = 0$, falls für alle $\infty > k > 0$ $\sum |\zeta_v|^k$ konvergiert, im übrig bleibenden Falle $\infty > \rho_\zeta > 0$, falls $\sum |\zeta_v|^k$ für $k > \rho_\zeta$ konvergiert, für $0 \leq k < \rho_\zeta$ divergiert. Es bezeichne für $0 \leq \kappa \leq \infty$ $M(\kappa)$ die Menge aller gegen 0 konvergenten Zahlenfolgen mit dem Grenzexponenten κ . Sei $\{f_v\}$ ($v = 1, 2, 3, \dots$) eine Elementfolge aus \mathfrak{B} , so sei $M\{f_v\}$ die Menge aller Zahlenfolgen $\{f_v\}$ mit f aus \mathfrak{B} . — Verf. beweist u. a. die folgenden Sätze: 1. Sei $\{f_v\}$ eine schwach gegen 0 konvergente Folge aus \mathfrak{B} , existiere ein κ ($0 \leq \kappa < \infty$) mit $M(\kappa) \subset M\{f_v\}$ und sei α_v eine Folge komplexer Zahlen. Dann ist notwendig und hinreichend dafür, daß auch $\{\alpha_v f_v\}$ gegen 0 schwach konvergent ist und mit einem $0 \leq \kappa^* < \infty$ $M(\kappa^*) \subset M\{f_v \alpha_v\}$ ist, das Bestehen von Ungleichungen $0 < \alpha_0 \leq |\alpha_v| \leq A_0 < \infty$ ($v = 1, 2, 3, \dots$) mit Konstanten α_0, A_0 . 2. Ist für alle f aus \mathfrak{B} $\sum_v |f_v|^\sigma$ ($\sigma > 1$ fest) konvergent, so konvergiert mit $\sum_v |\zeta_v|^{\sigma/(\sigma-1)}$ auch $\sum_v \zeta_v f_v$ (stark!). 3. Existiert ein κ ($0 \leq \kappa < \infty$) mit $M(\kappa) \subset M\{f_v\}$ und konvergiert $\sum \zeta_v f_v$, so gilt $1/\rho_\zeta + 1/\kappa \geq 1$. 4. (Entwicklungssatz). Sei $f_\mu f_v = \delta_{\nu\mu}$ ($\nu, \mu = 1, 2, 3, \dots$), die Folge f_μ total, $\sum_v |f_v|^\sigma$ ($\sigma > 1$, fest) für alle f aus \mathfrak{B} konvergent. Dann gilt für diejenigen f aus \mathfrak{B} , für die $\sum |f_\mu f|^\sigma$ konvergiert, die Entwicklung $f = \sum_v f_v f \cdot f_v$. (4. verschärft einen Satz von A. J. Pell, [Trans. Amer. math. Soc. 12, 135—164 (1911)], der nur für den Hilbertschen Raum die schwache Konvergenz der Reihe behauptet.) Verf. führt die durch Satz 2. und 3. nahegelegten Grenzexponenten der Folge $\{f_v\}$, die untere Grenze der möglichen σ bzw. obere Grenze der möglichen κ ein und beweist für Biorthogonalsysteme unter verschiedenen Voraussetzungen Relationen zwischen den so möglichen Exponenten. Haupthilfsmittel der Beweise sind die Hölder-Minkowskische Ungleichung und (bei 2.) das Theorem von Banach und Steinhaus [S. Banach, Théorie des opérations linéaires, Warszawa 1932, p. 80; dies. Zbl. 5, 209]. F. W. Schäfke (Mainz).

Kondrašov, V. I.: Das Verhalten der Funktionen aus L_p^* auf Mannigfaltigkeiten verschiedener Dimensionen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 72, 1009—1012 (1950) [Russisch].

L_p^v , $p \geq 1$ is the Banach space of all functions defined in a domain D of the n -dimensional space which have derivatives of all orders up to v , integrable in D with p th power. The a. continues the previous work by Soboleff [Mat. Sbornik, n. S. 2 (44), 465—499 (1938) and 4 (46), 471—496 (1938), this Zbl. 22, 148] and himself [Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 51, 415—418 (1946)]. His theorems concern among other things the existence of p' -mean limit values ($p' > p$) of functions $f \in L_p^v$ or their derivatives along families of manifolds of dimension $r < n$ and the compactness of certain sets of these functions. *G. G. Lorentz.*

Kaplansky, I.: Quelques résultats sur les anneaux d'opérateurs. C. r. Acad. Sci., Paris 231, 485—486 (1950).

Soit M une algèbre autoadjointe faiblement fermée d'opérateurs dans un espace hilbertien, M' l'algèbre commutante. L'A. généralise divers résultats de Murray et von Neumann, relatifs au cas où M est un facteur, au cas général, développant ainsi ce qu'il appelle l'étude „globale“ de ces algèbres. Il donne des relations entre les „classes“ de M et de M' . Lorsque M est de type fini, il énonce des théorèmes concernant la continuité de la trace, la continuité des isomorphismes, et les algèbres „approximativement finies“. Autre théorème: si M est quelconque, et si N est une sous-algèbre autoadjointe fortement dense dans M , la boule unité de N est fortement dense dans celle de M . *Dixmier (Paris).*

Fage, M. K.: Über Orthogonalisierung von Basen im Hilbertschen Raum. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 74, 1053—1056 (1950) [Russisch].

Verf. betrachtet in einem allgemeinen Hilbertschen Raum E Systeme von Unterräumen $\{H_n\}_1^\infty$. Für solche erklärt er in naheliegender Weise die Begriffe (Orthogonal-)Basis und Biorthogonalsystem. Er untersucht den Zusammenhang dieser Begriffe mit den idempotenten Zerlegungen des Einselementes und verallgemeinert den Schmidtschen Orthogonalisierungsprozeß auf Basen der oben beschriebenen Art. Dabei gibt er lineare, umkehrbare Operatoren A_n an, für die $H_k = A_n H_k$ ($k = 1, \dots, n$) gilt, wo $\{H'_n\}_1^\infty$ die durch das Verfahren erzeugte Orthogonalbasis ist. Schließlich werden notwendige und hinreichende Bedingungen dafür aufgestellt, daß die Folge A_n gegen einen Operator A konvergiert. Das letzte Ergebnis wird noch in erweiterter Form für gewöhnliche Basen (wo also jedes H_n genau ein Element enthält) formuliert. Die Arbeit schließt sich eng an eine vorangehende des Verf. an (dies. Zbl. 36, 357). *K. Zeller (Tübingen).*

Sz.-Nagy, Béla: Une caractérisation affine de l'ensemble des fonctions positives dans l'espace L^2 . Acta sci. math., Szeged 12A, L. Fejér et F. Riesz LXX annos natis dedic., 228—238 (1950).

Es sei \mathfrak{H} ein separabler reeller Hilbertscher Raum. Es wird folgender Satz bewiesen, den Verf. im Fall eines endlichdimensionalen Euklidischen Raumes bereits früher bewies [Comm. math. Helvetici 17, 209—213 (1944)]: Dann und nur dann ist eine Teilmenge \mathfrak{P} von \mathfrak{H} durch eine Affinität von \mathfrak{H} auf einen L^2 -Raum in die Menge aller $f(x) \geq 0$ abbildbar, wenn \mathfrak{P} die folgenden Bedingungen erfüllt: A_1 . Mit u ist λu , $\lambda \geq 0$, in \mathfrak{P} und μu , $\mu < 0$, nicht in \mathfrak{P} ; A_2 . Mit u, v ist $u + v$ in \mathfrak{P} ; A_3 . Ist $u_n \in \mathfrak{P}$, $u_n \rightarrow u$, so ist $u \in \mathfrak{P}$; A_4 . Ist $u_n, v_n \in \mathfrak{P}$, $u_n + v_n \rightarrow 0$, so ist $u_n \rightarrow 0$; A_5 . Jedes $f \in \mathfrak{H}$ ist Differenz zweier $u, v \in \mathfrak{P}$; B. Ist $u_1 + u_2 = v_1 + v_2$ für $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathfrak{P}$, so gibt es $w_{11}, w_{12}, w_{21}, w_{22} \in \mathfrak{P}$ mit $u_1 = w_{11} + w_{12}$, $u_2 = w_{21} + w_{22}$, $v_1 = w_{11} + w_{21}$, $v_2 = w_{12} + w_{22}$. Der Beweis verwendet die Spektraltheorie, Sätze von Grosberg und Krein über konische Mengen in Banachräumen, Resultate von Birkhoff, Freudenthal und Riesz über Vektorverbände und einen Satz von Dixmier über die beschränkten Darstellungen Boolescher Algebren durch lineare Operationen eines Hilbertschen Raumes. Es wird angedeutet, wie die Verallgemeinerung auf nichtseparable \mathfrak{H} durchzuführen ist. *G. Köthe.*

Ganapathy Iyer, V.: On the space of integral functions. II. Quart. J. Math. (Oxford II. Ser.) 1, 86—96 (1950).

L'A. continue l'étude de l'espace Γ des fonctions entières, qui est un espace (F) quand on le munit de la topologie de la convergence uniforme dans les parties compactes du plan complexe. Il précise pour cet espace le théorème de Hahn-Banach sur l'extension des formes linéaires continues (valable dans tout espace localement convexe) ainsi que les conditions d'existence des systèmes biorthogonaux. Il montre ensuite que l'espace Γ admet des bases au sens de Banach, c'est-à-dire qu'il existe des suites (α_n) d'éléments de Γ telles que pour tout $\alpha \in \Gamma$, il existe une suite unique $(t_n(\alpha))$ de nombres complexes telle que la série $\sum_{n=0}^{\infty} t_n(\alpha) \alpha_n$ converge dans Γ et ait

pour somme α ; il donne de nombreux exemples de telles bases, la plus simple étant évidemment celle qui est formée par les fonctions z^n . Pour une base (α_n) , chacune des fonctions t_n est une forme linéaire continue sur Γ . J. Dieudonné (Nancy).

Krejn, M. G.: Über eine Anwendung des Fixpunktprinzips in der Theorie der linearen Transformationen von Räumen mit indefiniter Metrik. Uspechi mat. Nauk 5, Nr. 2 (36), 180—190 (1950) [Russisch].

Es sei E der komplexe n -dimensionale Raum, $y = Ax$ eine Transformation von E in sich, die durch eine Matrix $A = (a_{ki})$ bewerkstelligt ist, und $J(x, y) = \sum_{i,k=1}^n g_{ik} x_k \bar{y}_i$ eine nicht ausgeartete hermitesche ($g_{ki} = \overline{g_{ik}}$) Form. A heißt J -unitär, wenn $J(Ax, Ax) = J(x, x)$, und J -hermitesch, wenn $J(Ax, y) = J(x, Ay)$ ist. — Mit Hilfe des Brouwerschen Fixpunktsatzes wird bewiesen: Hat die kanonische Darstellung von $J(x, x)$ genau p positive Quadrate und gilt $J(Ax, Ax) \geq J(x, x)$ für $J(x, x) \geq 0$, so besitzt A einen p -dimensionalen invarianten Unterraum, auf dem $J(x, x) \geq 0$ bleibt und für den alle Eigenwerte von A dem Modul nach ≤ 1 sind. Im Spezialfall eines J -unitären A ist das ein wohlbekannter Satz von Frobenius. Ein analoger Satz wird durch Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ auch für den Hilbertschen Raum bewiesen. Verf. bemerkt, daß der Frobeniussche Satz einer gewissen Aussage über J -hermitesche A äquivalent ist, die für den Fall des Hilbertschen Raumes sehr umständlich von Pontrjagin [Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 8, 243—380 (1944)] bewiesen wurde. G. G. Lorentz (Kingston, Ont.).

Iochvidov, I. S.: Über die Spektren Hermitescher und unitärer Operatoren in einem Raum mit indefiniter Metrik. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 71, 225—228 (1950) [Russisch].

Soit H l'espace de Hilbert des suites $x = (\xi_n)$ de nombres complexes telles que $\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 < +\infty$, et supposons donnée dans H une forme bilinéaire symétrique

$(x, y) = - \sum_{j=1}^k \xi_j \eta_j + \sum_{n=1}^{\infty} \xi_{k+n} \bar{\eta}_{k+n}$. Continuant des travaux de L. Pontrjagin [Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 8, 243—260 (1944)] et de M. G. Krejn (v. l'analyse précéd.), l'A. étudie le spectre d'un opérateur biunivoque U de H sur lui-même tel que $(Ux, Uy) = (x, y)$ [opérateur „unitaire“ pour la forme (x, y)]. Il montre que H est somme directe de trois sous-espaces L, M, H'' deux à deux orthogonaux [pour la forme (x, y)] et ayant les propriétés suivantes: L est de dimension finie $2l$, où $l \leq k$, est invariant par U , et les sous-espaces de L invariants par U correspondent à des valeurs propres λ telles que $|\lambda| \neq 1$; M est de dimension $q \leq k - l$, est invariant par U et tel que $(x, x) \leq 0$ pour tout $x \in M$. Tout revient à étudier U dans le sous-espace „parabolique“ H'' , où la forme (x, y) ne comprend cette fois que $k'' = k - l - q$ termes négatifs et où il n'existe aucun sous-espace invariant par U et correspondant à une valeur propre de module $\neq 1$, ou ne contenant que des vecteurs tels que $(x, x) \leq 0$. Il n'y a de difficulté que pour $k'' > 0$; nous renvoyons à l'article lui-même pour l'énoncé des résultats. L'A. indique enfin des applications de ses résultats à certaines équations intégrales. L'article ne contient pas de démonstrations. J. Dieudonné (Nancy).

Aronszajn, N.: Theory of reproducing kernels. Trans. Amer. math. Soc. 68, 337—404 (1950).

La notion de noyau reproduisant (n. r.) a été introduite par l'A. dans un travail antérieur [Proc. Cambridge phil. Soc. 39, 133—153 (1944)], que le présent article développe considérablement, à la fois sur le plan abstrait et sur le plan des applications. Il est impossible de faire un résumé complet. — Dans une introduction historique, l'A. montre comment des n. r. plus ou moins généraux se sont présentés dans des exemples (fonctions de Green, noyaux de J. Mercer, de S. Zaremba, de S. Bergmann, matrices positives hermitiennes de E. H. Moore, fonctions de type positif de S. Bochner, etc.). — La propriété centrale prise ici pour définition est la suivante: soient E un ensemble abstrait, F un espace vectoriel complexe de fonctions sur E , muni d'un produit scalaire $\langle f, g \rangle$ qui en fait un espace hilbertien. Une fonction $K(x, y)$ ($x \in E, y \in E$) est un n. r. de F si, pour tout $y \in E$, la fonction $x \rightarrow K(x, y)$ est dans F , et si, pour toute $f \in F$, $f(y) = \langle f(x), K(x, y) \rangle$. — L'A. rappelle les propriétés essentielles des n. r. Par exemple, F possède un n. r. si et seulement si, pour tout $y \in E$, $f \rightarrow f(y)$ est une forme linéaire continue sur F , et le n. r. est alors unique; réciproquement, la fonction $K(x, y)$ est le n. r. d'un F si et seulement si K est une matrice positive au sens de Moore, et F est alors unique. — Soit F_1 un espace vectoriel complexe de fonctions sur E , muni d'un produit scalaire, et non nécessairement complet. Un espace vectoriel complexe $F \supset F_1$ de fonctions sur E est appelé complétion fonctionnelle de F_1 si, muni d'un produit scalaire qui prolonge celui de F_1 , il est hilbertien, et si, pour tout $y \in E$, $f \rightarrow f(y)$ est une forme linéaire continue sur F (on voit que F admet un n. r.). Pour que F existe, il faut et il suffit que: 1. pour tout $y \in E$, $f \rightarrow f(y)$ soit continue sur F_1 ; 2. pour toute suite de Cauchy (f_n) dans F_1 , la condition $f_n(y) \rightarrow 0$ pour tout y entraîne $\|f_n\| \rightarrow 0$; F est alors unique. — Soient K_1, K_2 des n. r. L'A. détermine les classes de fonctions associées aux n. r. $K_1 + K_2$, $K_1 K_2$, à $K_1 - K_2$ quand $K_1 - K_2$ est un n. r., à la restriction de K_1 à un sous-ensemble de E ; il étudie divers problèmes concernant les suites de n. r. — Une résolution de l'identité dans F permet de construire un n. r. de F ; par exemple, si (g_i) est un système orthonormal dans F , $K(x, y) = \sum g_k(x) \overline{g_k(y)}$ est un n. r. de F . — Soit $A(x, y)$ une fonction hermitienne. Pour qu'il existe un opérateur hermitien L sur F de borne inférieure $\geq m > -\infty$ et de borne supérieure $\leq M < +\infty$, tel que $L f(y) = \langle f(x), A(x, y) \rangle$, il faut et il suffit que $m K \ll A \ll M K$ (où $A \gg A'$ signifie que $A - A'$ est une matrice positive). L'A. étudie les relations entre L et A . — La 2^e partie applique les résultats généraux à des exemples. Soit D un domaine plan. On prend comme classe F la classe des fonctions holomorphes de carré sommable dans D , ou sur la frontière de D , ou la classe des fonctions harmoniques de carré sommable dans D . L'A. étudie les relations entre les n. r. correspondants, et la manière dont ils dépendent de D . Il les détermine explicitement dans certains cas (intérieur d'une ellipse, bande...). — Une abondante bibliographie termine le travail. Dixmier (Paris).

Kaplan, Wilfred: Dynamical systems with indeterminacy. Amer. J. Math. 72, 573—594 (1950).

Soit V_n une variété compacte et soit V_{2n} la variété des vecteurs tangents à V_n . Un champ de vecteurs sur V_n est une section $\varphi(V_n)$ de l'espace fibré V_{2n} . Soit donc φ un champ de vecteurs sur V_n , et soit ε un voisinage de $\varphi(V_n)$ dans V_{2n} . Une trajectoire $x(t)$ sera une ε -trajectoire de φ si $(x(t), x'(t)) \in \varepsilon$ quel que soit t . L'étude des ε -trajectoires de φ est justifiée par des considérations du domaine de la physique. — Soit $\alpha(x, \varepsilon)$ [resp. $\omega(x, \varepsilon)$] l'ensemble des points y tels qu'il existe une ε -trajectoire de y vers x [resp. de x vers y]. Les ensembles du type $\{x\} \cup (\alpha(x, \varepsilon) \cap \omega(x, \varepsilon))$ définissent une partition de V_n ; les éléments de cette partition sont des „états“. Les états sont ordonnés par la relation de postériorité. L'A. montre que pour tout

état π , il existe un état maximal qui lui est postérieur (état ω -stable); de plus l'ensemble des états ω -stables est fini. Si ε est remplacé par un voisinage η de $\varphi(V_n)$ (avec $\varepsilon \supset \eta$) et si $K(\varepsilon)$ [resp. $K(\eta)$] désigne le nerf du recouvrement de V_n par les ensembles $\alpha(\pi, \varepsilon)$ [resp. $\alpha(\pi, \eta)$] (où π est un état ω -stable), alors $K(\eta)$ est plus fin que $K(\varepsilon)$. — L'A. montre comment construire $K(\varepsilon)$ en utilisant un nombre fini d'éléments de $\varphi(V_n)$, et il donne une application à l'équation de Van der Pol. D'autres applications sont annoncées. *Reeb (Strasbourg).*

Hadwiger, H.: Studie zu einer Funktionalgleichung. Elemente Math., Basel 5, 86—88 (1950).

Es wird gezeigt, daß die allgemeine Lösung von (1) $\varphi(\alpha x) - \alpha \varphi(x) = 0$ [$\alpha \neq 1$ ist positiv, $\varphi(x)$ ist für jedes $x \geq 0$ definiert] durch

$$\varphi(x) = \alpha^{[\alpha \log x]} \omega(x \alpha^{-[\alpha \log x]})$$

gegeben ist, wo $[\]$ das Gaußsche Klammersymbol bezeichnet, und $\omega(\vartheta)$ eine beliebige, für $\alpha < \vartheta \leq 1$ definierte Funktion bedeutet (ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird $0 < \alpha < 1$ vorausgesetzt). Ferner zeigt Verf., daß die allgemeine Lösung der Funktionalgleichung (2) $\Phi(\alpha x) - \alpha \Phi(x) = F(x)$ [wo außer den oben gestellten Bedingungen noch $F(x) = F(0) + F'(0)x + O(x^2)$ vorausgesetzt wird] durch

$$\Phi(x) = \varphi(x) + \frac{F(0)}{1-\alpha} + \frac{F'(0)}{\alpha \log \alpha} x \log x - \frac{x}{\alpha} \sum_{v=0}^{\infty} \left\{ \frac{F(\alpha^v x) - F(0)}{\alpha^v x} - F'(0) \right\}$$

gegeben ist. — [Bemerkung des Ref.: Bekanntlich hat die allgemeine Lösung von (1) die Gestalt $\varphi(x) = x \pi(\alpha \log x)$, wo $\pi(\vartheta)$ eine beliebige periodische Funktion ist [$\pi(\vartheta + 1) = \pi(\vartheta)$], (2) kann mittels der Transformation $t = \alpha \log x$, $f(t) = \Phi(\alpha^t)/\alpha^t$, $\varphi(t) = F(\alpha^t)/\alpha^{t+1}$ in die einfache Differenzengleichung: $f(t+1) - f(t) = \varphi(t)$ übergeführt werden.] *J. Aczél (Miskolc).*

Praktische Analysis:

●Cannel, N.: First year applied mathematics. University of London Press 1950. 284 p., 10 s. 6 d.

Bückner, Hans: Über ein unbeschränkt anwendbares Iterationsverfahren für Systeme linearer Gleichungen. Arch. Math., Karlsruhe 2, 172—177 (1950).

Verf. diskutiert die Lösung des Systems linearer Gleichungen $\sum_k a_{ik} x_k = r_i$ oder in Matrixform $\mathfrak{A} \mathfrak{x} = \mathfrak{r}$, mittels des Iterationsverfahrens

$$\mathfrak{x}^{(v)} = \mathfrak{x}^{(v-1)} + \mathfrak{G}^{(v)} [\mathfrak{A} \mathfrak{x}^{(v-1)} - \mathfrak{r}],$$

wo $\mathfrak{G}^{(v)} = c_v \mathfrak{G}$, $c_v \neq 0$ und $c_\mu = c_v$ für $\mu \equiv v \pmod{q}$. *E. M. Bruins.*

Aitken, A. C.: Studies in practical mathematics. V: On the iterative solution of a system of linear equations. Proc. R. Soc. Edinburgh A 63, 52—60 (1950).

Es werden die Konvergenzverhältnisse bei Iterationsverfahren zum Lösen eines linearen Gleichungssystems $\mathfrak{A} \mathfrak{x} = \mathfrak{a}$ untersucht. Zur Iteration wird das lineare System mit $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} - \mathfrak{C}$ in die Rekursionsformel umgeschrieben $\mathfrak{B} \mathfrak{x}_{i+1} = \mathfrak{C} \mathfrak{x}_i + \mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{B} (\mathfrak{x}_{i+1} - \mathfrak{x}_i) = \mathfrak{C} (\mathfrak{x}_i - \mathfrak{x}_{i-1})$. Für die Güte der Konvergenz (Geschwindigkeit der Konvergenz) der Folge \mathfrak{x}_i sind die charakteristischen Zahlen λ_i der Iterationsmatrix $\mathfrak{B}^{-1} \mathfrak{C}$, die dem Betrage nach < 1 sein müssen, maßgebend. Sind die λ_i außerdem noch reell, dann können einfache Methoden zur Konvergenzbeschleunigung angewandt werden. — Es wird gezeigt, daß eine passende Wahl der Matrix \mathfrak{B} zu den bekannten Iterationsverfahren wie Gesamtschrittverfahren, Seidelsche Iteration usw. führt. — Für das Weitere wird vorausgesetzt, daß \mathfrak{A} symmetrisch und positiv definit ist. Bekanntlich konvergiert in diesem Falle das Seidelsche Verfahren immer, aber die charakteristischen Zahlen der Iterationsmatrix können auch komplex sein. Es wird eine Variante des Seidelschen Verfahrens gebracht, bei der alle λ_i reell sind.

Hierzu wird, von einem gewählten Anfangsvektor x_0 ausgehend, x_1 nach Seidel, mit der ersten Gleichung beginnend, (von oben nach unten) gerechnet; anschließend wird aber nicht wieder mit der ersten Gleichung angefangen, sondern, von der letzten Gleichung ausgehend, von unten nach oben gerechnet, womit man x_2 erhält. Dann wird wieder von oben nach unten gerechnet usw. Betrachtet man die Vektoren $x_i, x_{i+2}, x_{i+4}, \dots$, so können einfache Konvergenzbeschleunigungen angewandt werden, die zu einer schnelleren Approximation der gesuchten Werte führen. Den Schluß der Arbeit bildet ein erläuterndes Beispiel. *H. Unger* (Darmstadt).

Hornich, Hans: Zur Auflösung von Gleichungssystemen. *Mh. Math., Wien* 54, 130—134 (1950).

Das für die Auflösung einer Gleichung $F(x) = 0$ bekannte Iterationsverfahren $x_{n+1} = x_n + l \cdot F(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ mit passendem l überträgt Verf. auf den n -dimensionalen Raum E^n . Ist $\mathfrak{F}(x) \in E^n$, $x \in E^n$, eine (dehnungsbeschränkte) Abbildung von E^n in sich, so wird zur Lösung des Gleichungssystems $y - \mathfrak{F}(x) = 0$ die Iteration $x_{n+1} = x_n + \mathfrak{Q}(y - \mathfrak{F}(x_n))$ durchgeführt, wo $\mathfrak{Q}(\mathfrak{z})$ eine passende nicht ausgeartete lineare Transformation des E^n mit $\mathfrak{Q}(0) = 0$ bezeichnet. Das genannte Gleichungssystem hat im Innern der Kugel $G = [|x - x_0| < \varrho]$, $\varrho > 0$, eine eindeutige Lösung x , und diese erhält man als $\lim x_n$, wenn es eine Zahl q mit $0 \leq q < 1$ gibt, so daß für $x', x'' \in G$

$$|\mathfrak{F}(x') - \mathfrak{F}(x'') - \mathfrak{Q}^{-1}(x' - x'')| \leq q |\mathfrak{Q}^{-1}(x' - x'')|$$

besteht, und wenn ferner $|y - \mathfrak{F}(x_0)| \leq \varrho(1 - q)\mu$, wo \mathfrak{Q}^{-1} die Umkehrung von \mathfrak{Q} und $\mu = \min |\mathfrak{Q}^{-1}(\mathfrak{z})|$ auf $|\mathfrak{z}| = 1$ bedeuten. — Verf. untersucht des näheren die zu einer Abbildung $\mathfrak{F}|G$ gehörige Gesamtheit der linearen Transformationen \mathfrak{Q} und Zahlen q mit obigen Eigenschaften. Beschränkung auf kleinere zu G konzentrische Kugeln verkleinert i. a. den Wert q und verbessert damit die Konvergenz; beliebig kleine q führen zur Differenzierbarkeit von \mathfrak{F} in x_0 . *Aumann* (München).

Collatz, L.: Iterationsverfahren für komplexe Nullstellen algebraischer Gleichungen. *Z. angew. Math. Mech.* 30, 97—101 (1950).

Verf. zeigt, daß sich, zur Lösung der algebraischen Gleichung $\sum_{k=0}^n a_k z^k = 0$, immer zwei Zahlen m und r auffinden lassen, so daß das Iterationsverfahren $z_{r+1} = \varphi(z_r)$ konvergiert; $\varphi(z)$ ist hier eine Funktion, die sich ergibt, indem man die mit z^r multiplizierte ursprüngliche Gleichung nach z^{m+r} auflöst und hieraus z als $(m+r)$ -te Wurzel bestimmt. *E. M. Bruins* (Amsterdam).

Richardson, L. F.: A purification method for computing the latent columns of numerical matrices and some integrals of differential equations. *Phil. Trans. R. Soc. London, A* 242, 439—491 (1950).

Zur Berechnung der charakteristischen Zahlen λ_i und der Eigenvektoren x_i des linearen Eigenwertproblems $(\mathfrak{A} - \lambda \mathfrak{E})x = 0$ werden iterative Methoden gebracht. Verf. schließt an das bekannte Iterationsverfahren $x^{(v+1)} = \mathfrak{A} x^{(v)}$ an und verwendet die „Spektralverschiebung“ nach allgemeinen Gesichtspunkten. Der zu iterierende Vektor wird mit $(\mathfrak{A} - \varrho \mathfrak{E})$ vormultipliziert, wobei die Wahl von ϱ nach der Methode der kleinsten Quadrate unter vereinfachten Annahmen über die Lage der charakteristischen Zahlen erfolgt. Bei reellen charakteristischen Zahlen

$$\lambda_n \leq \lambda_{n-1} \leq \lambda_{n-2} \leq \dots \leq \lambda_1$$

z. B. wird zur Bestimmung von λ_1 und x_1 die Größe $\varrho = \lambda_1 - \frac{2}{3}(\lambda_1 - \lambda_n)$ gesetzt, ein Wert, der am Anfang der Rechnung nur roh geschätzt werden kann. — Die Vorgehensweise wird in zweierlei Richtung ausgebaut: 1. Bei der Ermittlung von λ_1 und λ_n Vormultiplikation mit mehreren Faktoren $(\mathfrak{A} - \varrho_1 \mathfrak{E})(\mathfrak{A} - \varrho_2 \mathfrak{E}) \dots$. 2. Bei der Ermittlung einer beliebigen charakteristischen Zahl λ_i ($\lambda_n < \lambda_i < \lambda_1$) Vormultiplikation mit $(\mathfrak{A} - \sigma \mathfrak{E})(\mathfrak{A} - \tau \mathfrak{E})$, wobei σ und τ symmetrisch zur gesuchten Wurzel

liegen sollen. Auch hier zunächst ein Vortasten, dann Heranziehung mehrerer Faktoraare zur Ermittlung genauer Werte. — Die Arbeit enthält eine Reihe von Beispielen mit Matrizen 3. und 4. Ordnung (auch mit nichtlinearen Elementarteilern), die oft Vergleiche mit dem gewöhnlichen Verfahren bringen. Das Vorgehen soll jedoch besonders für Matrizen höherer Ordnung anwendbar sein und der Geschicklichkeit des Rechners mehr Spielraum geben als dies bei der gewöhnlichen Iteration der Fall ist. — Zum Schluß werden die Methoden auf zwei Randwertprobleme partieller Differentialgleichungen angewandt.

H. Unger (Darmstadt).

Vinograd, Bernard: Note on the escalator method. Proc. Amer. math. Soc. 1, 162—164 (1950).

Bei der „Eskalatormethode“ von J. Morris werden die charakteristischen Zahlen λ einer reellen nichtsingulären quadratischen n -reihigen Matrix A angenähert bestimmt, indem man, von den Lösungen x_p der p -reihigen quadratischen Abschnittsmatrix A_p mit $A_p x_p = \lambda^{(p)} x_p$ ausgehend, die Lösungen x_{p+1} für A_{p+1} näherungsweise bestimmt und so allmählich zur vollen Matrix A aufsteigt. Verf. erweitert die Methode auf den bisher nicht erfaßten Fall, daß die Elementarteiler von A_p nicht linear sind.

Collatz (Hannover).

Henrici, Peter: Zur Berechnung der Eigenwerte von Matrizen durch Lochkartenmaschinen. Z. angew. Math. Phys., Basel 1, 185—189 (1950).

Die dominierende, d. h. die dem Betrage nach größte charakteristische Zahl λ_1 einer reellen oder komplexen quadratischen Matrix kann mit Hilfe von Lochkartenmaschinen nach bekanntem Verfahren durch Iteration von Vektoren bestimmt werden, sofern keine andere charakteristische Zahl den gleichen oder annähernd gleichen Betrag hat. Es wird gezeigt, wie man aus den iterierten Vektoren die partiellen Ableitungen $\partial \lambda_1 / \partial a_{ij}$ von λ_1 nach den Elementen a_{ij} der Matrix berechnen und diese Formel auch mit der Lochkartenmaschine ohne große Mehrarbeit auswerten kann.

Collatz (Hannover).

Bückner, Hans: Bemerkungen zur numerischen Quadratur. I, II. Math. Nachr., Berlin 3, 142—145, 146—151 (1950).

Wenn man bei irgendeiner numerischen Quadratur etwa n Werte des Integranden benutzt und die Abszissen nach Gauß in besonderer Weise nicht äquidistant wählt, erhält man bekanntlich für kleine Werte n sehr gute Approximation. Es wird nun gezeigt, daß man asymptotisch, d. h., wenn n gegen ∞ geht, keine größere Genauigkeit erhält als bei zweckmäßiger Benutzung äquidistanter Abszissen. Konvergenzbetrachtungen werden angestellt. Eine alte Quadraturformel mit äquidistanten Abszissen wird untersucht und modifiziert, insbesondere für den Fall, daß der Integrand einen Parameter enthält. Anwendungen auf die numerische Behandlung von Integralgleichungen werden angekündigt.

Nyström (Helsinki).

Mysovskich, I. P.: Über die Konvergenz der Methode von L. V. Kantorovič zur Lösung von Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 70, 565—568 (1950) [Russisch].

Das Newtonsche Iterationsverfahren zur Bestimmung von Nullstellen reeller Funktionen wurde von L. V. Kantorovič auf Banachräume übertragen (dies. Zbl. 34, 212; 31, 57). Verf. gibt Eindeutigkeitssätze und Abschätzungen für die Güte der Konvergenz des Verfahrens und untersucht eine Modifikation der Methode. Beispiel einer Abschätzung: $\|x_k - x\| \leq C \cdot q^{2^k - 1}$ ($q < 1$), wo C und q näher angegeben werden. — Einer der Sätze wurde im Falle reeller Funktionen von Ostrowski bewiesen [Mat. Sbornik, n. S. 3, 253—258 (1938); dies. Zbl. 19, 273]. Es folgen zwei Anwendungen auf die Lösung von Gleichungssystemen der Form $f_i(x_1, \dots, x_n) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) und auf die Lösung der Integralgleichung
$$x(s) = \int_0^1 K(s, t) f(t, x(t)) dt,$$
 wobei Sätze von Bussmann [veröffentlicht von

Rehbock, Z. angew. Math. Mech. **22**, 361—362 (1942); dies. Zbl. **28**, 15] und Niemytzki [Mat. Sbornik **41**, 421—438 (1934); dies. Zbl. **11**, 26] verschärft werden.

K. Zeller (Tübingen).

Nikolaeva, N. V.: Über die Relaxationsmethode von Southwell. (Kritische Übersicht.) Akad. Nauk SSSR, Trudy mat. Inst. Steklov **28**, 160—182 (1949) [Russisch].

Weinhold, Josef: Eine näherungsweise Integration der Differentialgleichung $y'' = f(y)$ bei Druckbiegeproblemen. Z. angew. Math. Mech. **30**, 247—248 (1950).

Ostrowski, Alexandre: Sur le rayon de convergence de la série de Blasius. C. r. Acad. Sci., Paris **227**, 580—582 (1948).

L'A. perfeziona un risultato di M. J. Kuntzmann secondo il quale la serie di potenze [serie di Blasius, Z. Math. Phys. **56**, 1—37 (1908)] che rappresenta l'integrale dell'equazione differenziale $y''' + y y'' = 0$ soddisfacente alle condizioni iniziali $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$, ha un raggio di convergenza R finito compreso fra 2,884 e 3,203. — L'A. dà due dimostrazioni del risultato di Kuntzmann che si prestano ad essere generalizzate. La prima ricorda il metodo di Borel da questi applicato nella dimostrazione del celebre teorema di Picard sulle trascendenti intere. La seconda si ispira al noto metodo di Cauchy e Poincaré delle serie maggioranti. Si trova che il raggio R della serie di Blasius soddisfa alle limitazioni: $3,1 < R < 3,18$. — E' da notare l'abilità con cui l'A. perviene al risultato annunciato con ragionamenti che, data la natura del risultato, richiedono sottili maggiorazioni e perizia.

Giuliano (Pisa).

Aczél, J.: Zur Charakterisierung nomographisch einfach darstellbarer Funktionen durch Differential- und Funktionalgleichungen. Acta sci. math., Szeged **12 A**, L. Fejér et F. Riesz LXX annos natis dedic., 73—80 (1950).

Als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine Funktion $z(x, y)$ von der Bauart $f(g(x) + h(y))$ ist, wo f, g, h monotone Funktionen einer Variablen bezeichnen, werden neben der bekannten partiellen Differentialgleichung 3. Ordnung von P. Saint Robert sechs weitere Formen in Gestalt von Differentialgleichungen angegeben, welche eine einfache Auffindung der zugehörigen f, g und h gestatten. Verschiedene Spezialisierungen in den f, g, h lassen sich erfassen durch Hinzunahme von passenden Randbedingungen zur Differentialgleichung, oder direkt durch Funktionalgleichungen, z. B. vom Typus $z(z(x, y), y') = z(x, z(y, y'))$ oder $z(x, y + y') = z(z(x, y), y')$.

Aumann (München).

Vil'ner, I. A.: Nomogramme von Systemen von Gleichungen und analytischen Funktionen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **58**, 729—732 (1947) [Russisch].

Während Verf. in einer früheren Arbeit [J. appl. Math. Mech., n. S. **4**, 105—115 (1940); dies. Zbl. **23**, 355] bereits zwei notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angegeben hat, daß sich das System der Gleichungen $f_1(x, y, z_1) = 0$, $f_2(x, y, z_2) = 0$ durch ein Fluchtliniennomogramm darstellen läßt, bei dem die beiden Skalen für x und y geradlinig sind, werden in dieser Arbeit erneut Bedingungen für den Fall angegeben, daß die Skalen Kurven sind. Die Bedingungen der ersten Arbeit sind als Spezialfälle enthalten, und zwei weitere Bedingungen sind das Kriterium für die Geradlinigkeit der Skalen für z_1 bzw. z_2 oder für z_1 und z_2 . — Aus Obigem lassen sich entsprechende Bedingungsgleichungen dafür ableiten, daß für eine analytische Funktion $F(w, z) = 0$ der komplexen Variablen w und z eine nomographische Darstellung möglich ist.

R. Ludwig (Braunschweig).

Sherman, Jack and Winifred J. Morrison: Simplified procedures for fitting a Gompertz curve and a modified exponential curve. J. Amer. statist. Assoc. **45**, 87—97 (1950).

Mit Hilfe einfacher Nomogramme und Funktionenpapiere werden Konstante in speziellen Funktionen von Exponentialform bestimmt, wenn gewisse Funktionswerte bekannt sind.

Bergström (Göteborg).

Miller, J. C. P.: Überblick über Rechenhilfsmittel. Z. angew. Math. Mech. 30, 273 (1950).

Mandò, Manlio: Le grandi calcolatrici moderne a successioni automatiche. II. Periodico Mat., IV. S. 28, 28—43 (1950).

(Teil I s. dies. Zbl. 36, 82.) Zunächst wird die Arbeitsweise des ENIAC beschrieben, insbesondere wird an der Hand schematischer Figuren die Art erläutert, wie Addition und Multiplikation von der Maschine ausgeführt werden. Weiterhin wird von der Programmierung, der Leitung der Operationen, den Möglichkeiten, die der ENIAC bietet, und den Grenzen dieser Möglichkeiten gesprochen. Verf. kommt zu dem Resultat, daß trotz ihrer Unzulänglichkeiten die Maschine zum ersten Male in konkreter Weise die Möglichkeiten gezeigt hat, die die Benutzung von Elektronenröhren für die Ausführung arithmetischer Operationen bietet. Die mit dem ENIAC gemachten Erfahrungen wurden außerordentlich wichtig für den Bau der neueren elektronischen Rechenautomaten. Willers (Dresden).

Mandò, Manlio: Le grandi calcolatrici moderne a successioni automatiche. III. Periodico Mat., IV. S. 28, 85—97 (1950).

In diesem abschließenden Bericht (s. vorsteh. Referat) werden zunächst die neueren Rechenautomaten wie der EDVAC und der EDSAC besprochen. Nach Erörterung der Vor- und Nachteile der Verwendung von Dualzahlen wird näher auf die Ultraschallwellenspeicher eingegangen, während die anderen Arten der Speicherung nur kurz erwähnt werden. Ferner wird auf Maßnahmen zum Schutz vor Rechenfehlern hingewiesen. Besonders geeignet hierfür erscheint die Verwendung der Neunerprobe, die nur eine Vergrößerung der Maschine um 20% erfordert und die Rechengeschwindigkeit nicht herabmindert. — In der Schlußbetrachtung behandelt Verf. die Anwendungsmöglichkeiten der großen Rechenautomaten. Die einzelnen Stadien, die ein physikalisches oder technisches Problem bei Anwendung eines Rechenautomaten durchlaufen muß, sind nach Ansicht des Verf. die folgenden: a) Herausschälen des mathematischen Problems aus dem konkreten, b) Untersuchung der Existenz und Eindeutigkeit der Lösung, c) Untersuchung der allgemeinen Eigenschaften der Lösung, d) Reduktion des Problems mittels geeigneter Approximationen auf ein solches, das sich für die Anwendung des Automaten eignet, e) numerische Berechnung der Lösung. Schließlich werden der Einfluß des Fehlers, der durch Verwendung von Näherungsmethoden entsteht, sowie dessen, der eine Folge der Abrundungen ist, erörtert. Willers (Dresden).

•Meyer zur Capellen, W.: Mathematische Instrumente. (Mathematik und ihre Anwendungen in Physik und Technik. Herausgegeben v. E. Kamke u. A. Kratzer, Bd. 1). Dritte, ergänzte Aufl. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig Kom.-Ges. 1949. X, 339 S. u. 250 Abb. Geb. DM 23,—.

Von den vorangegangenen Auflagen (vgl. z. B. dies. Zbl. 26, 133) unterscheidet sich die dritte Auflage vor allem durch einen Nachtrag, der insbesondere auf die während des Krieges vorangeschrittene Entwicklung von Integrieranlagen und programmgesteuerten Ziffernmaschinen Bezug nimmt. Auch andere neuere Entwicklungen auf dem Gebiet der Ziffern- und der Analogiermaschinen werden kurz beschrieben.

Hans Bückner (Minden, Westf.).

•Taton, R.: Le calcul mécanique. (Collection Que sais-je ? no. 367.) Paris: Presses Universitaires de France 1949. 128 p.; 90 fr.

Es handelt sich um eine kurze, im wesentlichen historisch angelegte Beschreibung der Rechengeräte. Im einzelnen werden Ziffernmaschinen, statistische Maschinen, die modernen programmgesteuerten Maschinen und Integrieranlagen behandelt. Die Darstellung der modernen Maschinen ist aber sehr kurz, wobei dem Verf. einige Verwechslungen über Details der modernen amerikanischen Maschinen unterlaufen sind. — Da keine der dem Ref. bekannten Darstellungen moderner Maschinen den Umstand erwähnt, daß die Anwendung des Dualsystems von

Raymond Louis André Valtat als erstem vorgeschlagen worden ist, möge dies an dieser Stelle einmal ausgesprochen werden. In der deutschen Patentschrift Nr. 664012, die eine französische Priorität vom 12. 9. 1931 in Anspruch nimmt, ist der technische Sachverhalt dargelegt. *Hans Bückner* (Minden, Westf.).

Wheeler, D. J.: Programme organization and initial orders for the EDSAC. Proc. R. Soc., London, A **202**, 573—589 (1950).

Verf. beschäftigt sich mit der Art der Programmierung für Maschinen, die wie der EDSAC Ein-Adressenbefehle benutzen, d. h. bei denen sich jeder Befehl nur auf einen Teilspeicher bezieht, bei denen ferner die Befehle in der Maschine wie die Ziffern verschlüsselt werden und in denselben Speichern wie diese normalerweise in der Folge, in der sie gebraucht werden, aufgezeichnet sind und in der zwei Zahlen zu einer längeren vereinigt werden können, mit der dann ebenso wie mit den kürzeren gearbeitet werden kann. Für das Anlaufen der Rechnung in solchen Automaten sind Anfangsanordnungen erforderlich, für die zwei verschiedene Möglichkeiten hier im einzelnen besprochen werden. Ausführlich beschäftigt sich Verf. weiter mit dem Einbau von Unterprogrammen in das laufende Programm, vor allem mit der Verwendung von Parametern in diesen, d. h. von Zahlen, die verschiedene Werte bei verschiedenen Anwendungen des Unterprogrammes haben, die während des Ablaufes der Rechnung geändert werden können. Als Beispiel wird die Aufstellung des Programmes für die Berechnung von $\cos \psi = \sin \omega \cos \delta + \cos \omega \sin \delta \sin \varphi$ bei konstantem ω und $0^\circ \leq \delta \leq 23^\circ$, $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$, wo bei beiden Winkeln die Schrittgröße 1° beträgt, ausführlich behandelt. Anhänge bringen den Befehls-Code des EDSAC und die Anfangsanordnungen für die beiden Möglichkeiten. *Willers*.

Sobrero, Luigi: Sui „meccanismi calcolatori“ di Svoboda. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat., natur., VIII. S. 8, 480—483 (1950).

Anschließend an eine Arbeit von Svoboda [Computing mechanism and linkages, Massachusetts Institute of Technology; Radiation Laboratory Series, vol. 25, New York and London 1948] definiert Verf. zunächst als Rechenmechanismen Vorrichtungen, die durch Drehung von Zeigern um die Winkel α, β, \dots andere Zeiger veranlassen, sich um die Winkel α', β', \dots zu drehen, die durch Funktionen $\alpha' = f(\alpha, \beta, \dots)$, $\beta' = g(\alpha, \beta, \dots)$ mit ersteren zusammenhängen. Näher geht er auf Funktionen zwischen zwei Veränderlichen $\alpha' = f(\alpha)$ ein und zeigt, ohne auf Einzelheiten einzugehen, daß diese Verbindung theoretisch durch das Abrollen zweier Polkurven aufeinander verwirklicht werden kann. Technisch wird man diese beiden aufeinander abrollenden Segmente dadurch aufeinander halten, daß man zwei Punkte der beiden Körper, die annähernd konstanten Abstand haben, durch eine Stange konstanter Länge verbindet. Man kann so die geforderte Abhängigkeit bis zu Abweichungen fünfter Ordnung realisieren, was für nicht zu große Variationsbereiche technisch genügt. Man kommt so bei bestimmten Funktionen zu denselben Resultaten und den gleichen Mechanismen wie Svoboda durch den von ihm angewandten Prozeß der sukzessiven Näherung. Für größere Genauigkeit sind kompliziertere Vorrichtungen erforderlich. *Willers* (Dresden).

Dubois-Violette, Pierre-Louis: Étude de l'influence des temps de propagation sur la stabilité des servo-mécanismes régulateurs par la méthode de fusion des racines. C. r. Acad. Sci., Paris **230**, 1499—1501 (1950).

Polisar, G. L.: Synthese mathematischer Maschinen und realer Objekte. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **74**, 711—714 (1950) [Russisch].

Fromme, Th.: Eine Bemerkung zum Thema „Schachmaschine“. Z. angew. Math. Mech. **30**, 293—294 (1950).

Kitover, K. A.: Tafeln der Summen einiger unendlicher trigonometrischer Reihen. Priklad. Mat. Mech., Moskva **12**, 233—240 (1948) [Russisch].

Bekanntlich ist für ungerades ν

$$\frac{d^{\nu-1}}{dx^{\nu-1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^{\nu}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} = -\log \left(2 \sin \frac{x}{2} \right).$$

Man kann daher die Summe der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^{\nu}}$ durch wiederholte Quadraturen der Funktion $\log(2 \sin x/2)$ finden, wobei man deren bekannte Potenzreihenentwicklung (mit den Bernoullischen Zahlen als Koeffizienten) zu benutzen hat. Verf. hat nach dieser Methode die Werte der obigen Reihe für die ersten sechs ν berechnet, in entsprechender Weise die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^{\nu}}$, deren Differentiation auf

$(\pi - x)/2$ führt, sowie die eng damit zusammenhängenden Reihen $\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^{\nu}}$

und $\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^{\nu}}$. Die auf vier Dezimalstellen berechneten Funktionswerte sind in zwei Tafeln zusammengestellt; dabei sind die Argumente im Winkelmaß gemessen und wachsen gradweise von 0° bis 180° . Da zahlreiche trigonometrische Reihen durch die angeführten vier ausgedrückt werden können, können die Tafeln zur numerischen Berechnung von Reihen vielfach verwandt werden. *W. Hahn.*

● **Beauclair, W. de und U. Sinogowitz:** Phasenfaktorentafel zur kristallographischen zweidimensionalen Fouriersynthese in Punkten eines Achtundvierzigstel-Netzes, enthaltend 91 Tafeln der Funktion $\cos 2\pi h x \cos 2\pi k y$, Erläuterung und Rechenanweisung. (Untersuchungen über die Fouriersynthese der Ladungsverteilung in Kristallen, Bd. II.) Berlin: Akademie-Verlag 1949. DM 38.—.

In diesem zweiten Band (I. vgl. dies. Zbl. 32, 415) sind Tabellen enthalten, welche die Berechnung der Doppelsummen

$$\sigma^*(x, y) = \sum_h \sum_k A_{hk} \cos 2\pi h x \cdot \cos 2\pi k y$$

für $h, k = 0 \rightarrow 20$ und $x, y = 0, n/48$ gestatten. Auf 91 Tafeln sind die Werte der Funktion $\cos 2\pi h x \cdot \cos 2\pi k y$ für ein gegebenes Wertepaar (x, y) für $h, k = 0 \rightarrow 20$ enthalten. Über jede Tafel ist ein transparentes Blatt zu legen, auf dem die A_{hk} -Werte eingetragen werden. Jeder A_{hk} -Wert ist mit der darunterstehenden (durchscheinenden) Zahl zu multiplizieren und alle Produkte sind hierauf zu addieren. *W. Nowacki (Bern).*

Rothman, M.: Table of $\int_0^x I_0(x) dx$ for $x = 0(0.1) 20(1) 25$. Quart. J. Mech. appl. Math., Oxford 2, 212—217 (1949).

Aufgaben über den Fluß einer zähen Flüssigkeit durch zwei nahe, waagerechte Platten erfordern die Zahlenwerte des Integrals $\int_0^x I_0(t) dt$ über den Umfang der dafür schon vorliegenden Tafeln hinaus. Solche hat R. Müller [auch für das Integral $\int_0^x K_0(t) dt$] im Spielraum $0(0.1) 5.2(0.2) 16$ berechnet. Verf. führt sie in $16(0.1) 20$ durch Potenzreihenentwicklung weiter und gewinnt sie dann mittels der Formel $\int_0^x I_0(t) dt = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k I_{2k+1}(x)$ von neuem. Ferner tabelliert er die Werte von $e^{-x} \int_0^x I_0(t) dt$ in $15(1) 25$. Die achtstelligen Ergebnisse sind durch Bildung der Differenzen nachgeprüft, die zur zweiten und vierten Ordnung in die Tafel aufgenommen sind. *L. Koschmieder (Tucumán).*

● **Tables of the generalized exponential-integral functions.** (The Annals of the Computation Laboratory of Harvard University, vol. 21.) Cambridge, Mass.: Harvard University Press 1949. XXV, 416 p.; \$ 8,00.

● **Tables of the function $(\sin \Phi)/\Phi$ and of its first eleven derivatives.** (The Annals of the Computation Laboratory of Harvard-University, vol. 22.) Cambridge, Mass.: Harvard University Press 1949. XIX, 241 p.; \$ 8,00.

● **Staff of the Computation Laboratory of Harvard University: Tables of the Bessel functions of the first kind of orders sixty-four through seventy-eight.** (Annals of the Computations Laboratory of Harvard University, Vol. 13.) Cambridge, Mass.: Harvard University Press; London: Oxford University Press 1949. IX, 566 p.; 63 s. net.

● **Ljusternik (Lusternik), L. S., I. J. Akušskij und V. A. Ditkin: Tafeln der Besselschen Funktionen.** Moskau und Leningrad: Staatsverlag für techn.-theor. Lit. 1949. 430 S.; 15 R. 70 K. [Russisch].

● **Faddeev, V. N. und M. K. Gavurin: Tafeln der Besselschen Funktionen $y_n(x)$ ganzzahliger Zeiger von 0 bis 120.** Moskau und Leningrad: Staatsverlag für techn.-theor. Lit. 1950. 439 S.; 21 R. [Russisch].

● **Tafeln der Werte der Besselschen Funktionen für imaginäre Argumente.** — Herausgeg. vom Math. Inst. Steklov der Akad. Nauk SSSR. Moskau: Verlag der Akad. d. Wiss. d. UdSSR 1950. 403 S.; 39 R. [Russisch].

Geometrie.

Grundlagen. Nichteuclidische Geometrie:

● **Duporcq, E.: Premiers principes de géométrie moderne.** — 3^{ème} éd. Paris: Gauthier-Villars 1949. 174 p., 375 fr.

Os, C. H. van: **Elementares vom höheren Standpunkt aus: Raum und Zeit.** Actual. Math. Centrum, Amsterdam, Rapport ZW 1950, 004, 2 S. (1950) [Holländisch].

Garavaldi, Orestina: Contributo ai fondamenti della geometria. Archimede, Firenze 2, 99—101 (1950).

Giorgi, Giovanni: Sui fondamenti della geometria. — Tre conferenze tenute al Seminario Matematico della R. Università di Roma 1912. — 2. ed. Encicel. Mat. e Complem., Milano 3^{II}, 975—1014 (1950).

Brouwer, L. E. J.: Kontradiktorizität der Elementar-Geometrie. Proc. Akad. Wet., Amsterdam 52, 315—316 (1949) [Holländisch].

Als Folgerung einer vorangehenden Note [Proc. Akad. Wet., Amsterdam 52, 122—124 (1949)] wird bemerkt, daß in der reellen euklidischen Ebene die Existenz eines Schnittpunkts je zweier Geraden, die weder zusammenfallen noch parallel sind, kontradiktorisch ist, und daß das gleiche für die Schnittpunkts-Existenz der reellen projektiven Ebene gilt.

Bachmann (Kiel).

Hjelmslev, Johannes: Grundlagen der Geometrie des Zirkels. Mat. Tidsskr. B, København 1949, 65—84 (1949) [Dänisch].

Verf. entwickelt ein System von Axiomen als Grundlage für die Zirkelgeometrie, d. h. für die Konstruktionen mit dem Zirkel allein. Die erste Gruppe von Axiomen bezieht sich auf Kreise und deren Lageverhältnisse. Die zweite Gruppe enthält zwei Bewegungs- oder Kongruenzaxiome: I. Es gibt (außer der Identität) eine und nur eine Bewegung, die zwei gegebene Punkte A , B fest läßt (Spiegelung am Punktepaar AB). II. Es gibt eine Bewegung, die zwei gegebene Punkte A und B in ein kongruentes Paar C und D überführt. Die dritte Gruppe besteht nur aus einem Axiom, dem „Schriftaxiom“: Jeder Kreis ist so beschaffen, daß ein Zirkel, dessen Öffnung dem Radius gleich ist, in 6 Schritten auf der Peripherie herumgehen kann.

— Fügt man zu diesen Voraussetzungen noch das Axiom von Eudoxos für zwei Bogen desselben Kreises, so ist die Zirkelgeometrie mit der euklidischen Geometrie identisch. Läßt man das Axiom von Eudoxos weg und setzt man an die Stelle des Schrittaxioms das euklidische Parallelenaxiom, so erhält man die euklidische Geometrie ohne Eudoxos' Axiom (die „nichteudoxische Geometrie“). Auch für diese gilt, daß alle Konstruktionen mit Zirkel und Lineal sich auch mit dem Zirkel allein ausführen lassen. — Da indessen das euklidische Parallelenaxiom als ein Schnittpostulat für gerade Linien in der Zirkelgeometrie nicht am Platze ist, so zeigt Verf., daß man die reinste Form eines Axiomensystems für eine inhaltsmäßig der euklidischen Geometrie in nichteudoxischer Form entsprechende Zirkelgeometrie erhält, wenn man zu den oben angeführten drei Axiomgruppen das folgende „Schnittpostulat“ für Kreise hinzufügt: Es gibt stets einen Kreis, der drei gegebene Kreise schneidet, die zwei und zwei außerhalb voneinander liegen. *Zacharias.*

Prenowitz, Walter: Total lattices of convex sets and of linear spaces. *Ann. Math.*, Princeton, II. S. 49, 659—688 (1948).

Die konvexen Mengen einer deskriptiven (geordneten linearen) Geometrie beliebiger, endlicher oder unendlicher, Dimension werden verbandstheoretisch charakterisiert. Für einen beliebigen Verband wird zunächst die lineare Abhängigkeit eines Punktes von einer Folge von Punkten erklärt. Ferner wird unter einer vollständigen Kongruenzrelation eine Äquivalenzrelation verstanden, die bei beliebiger Bildung von Vereinigung und Schnitt erhalten bleibt. Es werden dann die folgenden Eigenschaften eines Verbandes betrachtet: I. (Punktexistenz) Ist $a < b$, so gibt es ein p , so daß $a < a \cup p \leq b$. II. (Endlichkeit der linearen Abhängigkeit) Ist ein Punkt $p \leq$ kleinste obere Grenze einer Punktmenge α , so ist $p \leq p_1 \cup \dots \cup p_n$ mit p_i aus α . III. (Transitivität der linearen Abhängigkeit) Ist p abhängig von q_1, \dots, q_m und sind q_1, \dots, q_m abhängig von r_1, \dots, r_n , so ist p abhängig von r_1, \dots, r_n . IV. (Quasi-Modularität) Ist c abgeschlossen (in bezug auf die lineare Abhängigkeit) und $a \leq c$, so gilt $(a \cup b) \cap c = a \cup (b \cap c)$. V. (Quasi-Einfachheit) Es gibt nur die trivialen vollständigen Kongruenzrelationen, nämlich die Identität und die Relation, bei der alle Elemente des Verbandes kongruent heißen. VI. Nicht jedes Element ist abgeschlossen. Es wird gezeigt: Der Verband der konvexen Mengen einer deskriptiven Geometrie ist charakterisiert durch die Eigenschaften der Vollständigkeit und I—VI, und der Verband der linearen Räume einer projektiven Geometrie (beliebiger Dimension) durch die Eigenschaften einer Vollständigkeit, I—V und die Negation von VI. Statt VI und Negation von VI kann hierbei auch Nicht-Modularität und Modularität verwendet werden. Für diese gleichzeitige Beschreibung der konvexen Mengen einer deskriptiven und der linearen Räume einer projektiven Geometrie wird von einer gemeinsamen Beschreibung der beiden Geometrien ausgegangen. Sie werden gekennzeichnet als Mengen von Punkten a, b, c, \dots mit einer Relation (abc) , welche im deskriptiven Fall „ b liegt zwischen a und c “, im projektiven „ a, b, c sind kollinear und verschieden“ bedeutet; die lineare Geometrie wird durch fünf Axiome über diese Relation definiert, die deskriptive durch Hinzunahme des Axioms: Es gibt a, b, c , für die (abc) wahr und (bca) falsch ist, und die projektive durch Hinzunahme der Negation. Der Begriff einer Punktmenge, die mit a, b alle x mit (axb) enthält, führt in einen Fall zu den konvexen Mengen, im anderen zu den linearen Räumen. *Bachmann (Kiel).*

Yang, Chung-Tao: Certain chains in a finite projective geometry. *Duke math. J.* 15, 37—47 (1948).

Eine Menge von $p^r + 1$ Punkten einer Geraden einer ebenen projektiven Geometrie $PG(2, p^n)$ über einem Galoisfeld mit p^n Elementen wird r -fache Kette genannt, wenn die Menge einer Teilgeometrie $PG(2, p^r)$ angehört. Ist $r = 1$, so hat man ein Möbius-Netz. Untersucht werden Ketten, für die r eine Potenz von 2 ist, die Teiler von n sein muß, und zwar 2^m -fache Ketten $C^{(m)}$ in einer 2^{m+1} -fachen

Kette $C^{(m+1)}$. Es wird eine Anzahl von Sätzen bewiesen, die sich auf folgende Begriffe beziehen: 1) Schneiden, Berühren, Getrennt-Liegen von $C_1^{(m)}$ und $C_2^{(m)}$; 2) konjugierte Punktepaare in bezug auf $C^{(m)}$; 3) Orthogonalität von $C_1^{(m)}$ und $C_2^{(m)}$. 1) ist definiert als Existenz von zwei gemeinsamen Punkten, einem gemeinsamen Doppelpunkt bzw. keinem gemeinsamen Punkt; der Begriff 2) beruht darauf, daß eine Kollineation, die alle Punkte einer $C^{(m)}$ fest läßt, für die übrigen Punkte der $C^{(m+1)}$ eine Involution ist; 3) bedeutet, daß die eine Kette ein konjugiertes Paar der anderen enthält. Z. B. wird gezeigt: Berühren sich $C_1^{(m)}$ und $C_2^{(m)}$ in einem Punkt A , so ist jede $C^{(m)}$, welche A enthält und zu $C_1^{(m)}$ orthogonal ist, auch zu $C_2^{(m)}$ orthogonal. Durch zwei Punkte P und Q , die nicht konjugiert in bezug auf $C_1^{(m)}$ sind, gibt es genau eine $C_2^{(m)}$, die zu $C_1^{(m)}$ orthogonal ist. Bei ungeradem p gibt es $C_1^{(m)}, \dots, C_4^{(m)}$, die zu je zweien orthogonal sind. *Bachmann (Kiel).*

Seiden, Esther: A theorem in finite projective geometry and an application to statistics. *Proc. Amer. math. Soc.* **1**, 282—286 (1950).

Aus der Einleitung: „In a paper „Mathematical theory of factorial design“ [Sankhya, Calcutta 8, 107—166 (1947)] R. C. Bose proved that the maximum number, $m_t(r, s)$, of factors which can be accommodated in symmetrical factorial design in which each factor is at $s = p^n$ levels (p being a positive prime and n a positive integer) and each block is of size s^r , without confounding any degrees of freedom belonging to any interaction involving t or lesser number of factors, is given by the maximum number of points of a finite projective space $PG(r-1, s)$ (of r homogeneous co-ordinates each of which is capable of s values) such that no t of the chosen points are conjoint (lie in a space of $t-2$ dimensions). Furthermore, R. C. Bose proved in the above mentioned paper that $m_3(4, s) = s^2 + 1$ when s is a power of an odd prime and $s^2 + 1 \leq m_3(4, s) \leq s^2 + s + 2$ when $s = 2^n$, $n > 1$. This inequality gives, for $s = 4$, $17 \leq m_3(4, 4) \leq 22$. It is the purpose of this paper to prove that $m_3(4, 4) = 17$. In other words: the maximum number of points of $PG(3, 4)$ such that no 3 of them are collinear cannot exceed 17.“

Bachmann (Kiel).

Nestorovič, N. M.: Über die Quadratur des Kreises und die Zirkulatur des Quadrates im Lobačevskijschen Raume. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. S. **63**, 613—614 (1948) [Russisch].

Die Zirkulatur eines Quadrats ist mit Zirkel und Lineal möglich, wenn die Winkelsumme des Quadrats π mal einer Quadratwurzelgröße ist, die Quadratur eines Kreises, wenn das Komplement des spitzen Winkels des Quadrats $\pi/2$ mal einem rationalen Bruch ist, für dessen Nenner n das reguläre n -eck konstruierbar ist.

Bachmann (Kiel).

Haantjes, J.: Equilateral point-sets in elliptic two- and three-dimensional spaces. *Nieuw Arch. Wiskunde*, II. S. **22**, 355—362 (1948).

Ein gleichseitiges q -tupel ist eine Menge von q Punkten, in der je zwei denselben Abstand haben. Denkt man sich der Kugel ein reguläres Tetraeder bzw. Ikosaeder einbeschrieben, so erkennt man, daß in der elliptischen Ebene gleichseitige Quadrupel und Sextupel existieren. Der Verf. zeigt, daß im dreidimensionalen elliptischen Raum sechs nicht-kongruente Arten von gleichseitigen Quintupeln, zwei Arten von Sextupeln und, wie in der Ebene, keine gleichseitigen Septupel existieren. Zum Beweis wird benutzt, daß gleichseitigen q -tupeln mit dem Punktabstand d des n -dimensionalen elliptischen Raumes q -reihige symmetrische Matrizen vom Rang $\leq n+1$ entsprechen, in denen $a_{\alpha\alpha} = 1$, $a_{\alpha\beta} = \pm \cos(d/r)$ für $\alpha \neq \beta$ ist und alle von Null verschiedenen Hauptminoren positiv sind. *Bachmann (Kiel).*

Riabouchinsky, Dimitri: Le concept de l'origine d'un nombre et les trigonométries hyperboliques. *C. r. Acad. Sci.*, Paris **226**, 859—862 (1948).

Riabouchinsky, Dimitri: Sur le problème des géométries non euclidiennes. *C. r. Acad. Sci.*, Paris **226**, 1058—1061 (1948).

Es wird die Darstellung der ebenen hyperbolischen Geometrie auf einer „Kugel“ $x^2 + y^2 + (iz)^2 = i^2$ oder einem zweischaligen Hyperboloid $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ behandelt (vgl. F. Schilling, Pseudosphärische, hyperbolisch-sphärische und elliptisch-sphärische Geometrie. Leipzig-Berlin 1937). Ebenen durch den Nullpunkt schneiden Geodätische aus. Die Formeln der hyperbolischen Trigonometrie werden durch Einführung hyperbolischer Polarkoordinaten erhalten. Die Lobatschefskische Formel für den Parallelwinkel wird aus der Tatsache hergeleitet, daß Ebenen durch eine Erzeugende des Asymptotenkegels hyperbolische Parallelen ausschneiden. Analogien zu Verhältnissen auf dem einschaligen Hyperboloid $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ werden betont.

Bachmann (Kiel).

Elementargeometrie:

Chu, T. S.: Angles with rational tangents. Amer. math. Monthly 57, 407—408 (1950).

Emch, Arnold: Rare problems in plane geometry. Scripta math., New York 16, 61—66 (1950).

Beard, Robert S.: The golden section and Fibonacci numbers. Scripta math., New York 16, 116—119 (1950).

● Archer, Allene, Miles C. Hartley and Veryl Schult: Plane geometry experiment. New York: The Macmillan Company: London: Macmillan and Co., Ltd., 1949. VI, 98 p.; 5 s. net.

Eine gut zusammengestellte Sammlung geometrischer Experimente, durch die ein Schüler der unteren Klassen durch selbständige Messungen auf die Grundtatsachen der ebenen Geometrie geführt wird. L. Fejes Tóth (Veszprém, Ungarn).

Popov, B. S.: Contribution à la géométrie du triangle. Fac. Philos. Univ. Skopje, Sect. Sci. nat., Annuaire 2, 111—129 und franz. Zusammenfassg. 130—134 (1949) [Serbisch].

Verf. will zeigen, mit welchem Vorteil man die vektorielle Methode auf gewisse Probleme der Dreiecksgeometrie anwenden kann. Er berechnet mit dieser Methode u. a. die Entfernungen des Schwerpunktes, des Höhenschnittpunktes, des Inkreismittelpunktes und der Ankreismittelpunkte von den Ecken und zum Teil voneinander als Funktionen der Seiten.

Zacharias (Quedlinburg).

Goormaghtigh, R.: Sur l'angle de deux cercles podaires. Mathesis 59, 99—101 (1950).

Sind P und Q zwei inverse Punkte (Winkelgegenpunkte) des Dreiecks ABC , so liegen ihre 6 Lotfußpunkte auf einem Kreis, dem gemeinsamen „Fußpunktkreis“ von P und Q . Verf. stellt sich die Aufgabe, den Winkel ψ der Fußpunktkreise zweier Paare inverser Punkte P, Q und P', Q' zu berechnen. Sei O der Umkreismittelpunkt, R der Umkreisradius, $\vartheta = \sphericalangle POQ$, $\vartheta' = \sphericalangle P'OQ'$, φ der Winkel der inneren Halbierenden der Winkel POQ und $P'OQ'$. Dann ist

$$\cos \psi = \frac{R^4 - R^2 \cdot OP \cdot OQ \cos \vartheta - R^2 \cdot OP' \cdot OQ' \cos \vartheta' + OP \cdot OQ \cdot OP' \cdot OQ' \cdot \cos 2\varphi}{(R^4 + OP^2 \cdot OQ^2 - 2R^2 \cdot OP \cdot OQ \cos \vartheta)^{\frac{1}{2}} (R^4 + OP'^2 \cdot OQ'^2 - 2R \cdot OP' \cdot OQ' \cos \vartheta')^{\frac{1}{2}}}$$

— Verf. untersucht mehrere Sonderfälle. Ist z. B. $P' \equiv O$ und P Mittelpunkt eines der Seitenberührungskreise, so ergibt sich der Feuerbachsche Satz. — Verf. wurde zu seiner Untersuchung angeregt durch eine von H. F. Sandham gefundene Verallgemeinerung des Feuerbachschen Satzes: Sandham berechnete den Winkel zwischen dem Feuerbachschen Kreis und dem Fußpunktkreis eines beliebigen Punktes (dies. Zbl. 34, 237).

Zacharias (Quedlinburg).

Deaux, R.: Sur les triangles isologiques. Mathesis 59, 44—52 (1950).

Wenn zwei Dreiecke ABC , $A'B'C'$ einer Ebene die Eigenschaft haben, daß die Geraden durch A, B, C , die mit den Geraden $B'C', C'A', A'B'$ einen Winkel ϑ_1 bilden, durch einen Punkt P gehen, so gehen die Geraden durch A', B', C' , die mit

BC , CA , AB den Winkel $-\vartheta_1$ bilden, durch einen Punkt P' . Das Dreieck $A'B'C'$ heißt isolog ABC für den Winkel ϑ_1 und das Zentrum P . Für $\vartheta_1 = 0$ oder $=\pi/2$ heißt $A'B'C'$ metaparallel oder ortholog ABC . Verf. verknüpft die isologen Dreiecke mit der quadratischen Involution. Er berechnet $\cot \vartheta_1$ als Quotienten zweier vektoriellen Ausdrücke, deren Nullsetzung auf die Fälle der Orthologie und des Metaparallelismus führt. Die Ecken der beiden Dreiecke können auf sechs verschiedene Arten paarweise einander zugeordnet werden. Dementsprechend gibt es sechs Isologiewinkel, die im allgemeinen verschieden sind. Verf. untersucht die Bedingungen für die Gleichheit zweier oder mehrerer dieser Winkel. *Zacharias.*

Decuyper, M.: Sur des triangles en position isogonale. *Mathesis* 59, 81—85 (1950).

Durch den Mittelpunkt O des Einheitskreises Γ ist eine Achse Ox gelegt. Ein Punkt M_i bzw. A_i von Γ ist bestimmt durch den Winkel $\varphi_i = (Ox, OM_i)$ bzw. $\alpha_i = (Ox, OA_i)$. Das Dreieck $M_1M_2M_3$ heißt in isogonaler Lage mit $A_1A_2A_3$, wenn

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 \equiv \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \pmod{2\pi}$$

ist. Durch eine passende Drehung kann man erreichen, daß die konstante Summe $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ den Wert π annimmt, so daß für alle zu $A_1A_2A_3$ isogonal liegenden Dreiecke die Gleichung $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = \pi$ besteht. Es zeigt sich, daß die Höhen der zu einem gegebenen Dreieck $A_1A_2A_3$ isogonal liegenden Dreiecke $M_1M_2M_3$ eine dreispitzige Hypozykloide H_3 einhüllen, die Γ zum dreifach berührenden Kreis hat, und deren einer Scheitel auf der durch jene Drehung fixierten Achse Ox liegt. Der Punkt M_1 heißt der Hauptpunkt der durch M_1 gehenden Tangente von H_3 . Von H_3 gilt ein von Bouvaist angegebener Satz, für den Verf. einen einfachen Beweis gibt: Der Höhenpunkt des aus den Hauptpunkten dreier Tangenten von H_3 gebildeten Dreiecks ist der Höhenmittelpunkt des aus den Tangenten gebildeten Dreiecks. — Die erhaltenen Ergebnisse werden zum Schluß angewendet auf die von Varopoulos behandelte Aufgabe: In welchem Gebiet der Ebene muß sich der Punkt $P(\lambda, \mu)$ befinden, damit ein Dreieck existiert, dessen Winkel den Gleichungen $\cos A + \cos B + \cos C = \lambda$ und $\sin A + \sin B + \sin C = \mu$ genügen? P muß in dem gemischtlinigen Dreieck JRS liegen, in dem J der Scheitel $(1,0)$ von H_3 , R die Spitze $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\sqrt{3})$, S der Punkt $(1,2)$, SJ eine gerade Strecke und JR und RS Bogen von H_3 sind. *Zacharias (Quedlinburg).*

Stoll, A.: Die Steinersche Hypozykloide. II. *Elemente Math.*, Basel 6, 73—78 (1950).

Im zweiten Teil seiner Arbeit (für Teil I vgl. dies. Zbl. 36, 222) behandelt Verf. die Steinersche Kurve (S) als Rollkurve eines Kreises auf der Innenseite eines anderthalbmal so großen Leitkreises und als Hüllkurve der Wallace-Geraden eines Dreiecks. Sodann betrachtet er unter den Tangentendreiecken von (S) die Hauptdreiecke, d. h. Tangentendreiecke, deren Höhen ebenfalls Tangenten an (S) sind, und die Nulldreiecke, d. h. drei Tangenten aus einem Punkt. Des weiteren erörtert er die Eigenschaften ähnlicher Tangentendreiecke und der Tangentendreiecke mit zwei festen und einer veränderlichen Seite. *Zacharias (Quedlinburg).*

Masip, R.: Das konvexe Trapez. *Gac. mat.*, Madrid, I. Ser. 1, 228—241 (1949) [Spanisch].

Verf. zieht in dem Trapez $ABCB'$ mit den parallelen Seiten BC und AB' durch den Diagonalschnittpunkt die Parallele zu BC und verbindet die Mitten der nicht parallelen Seiten. Sodann berechnet er eine große Zahl von Strecken, Winkeln und Flächeninhalten der Figur als Funktionen der vier Seiten. Zum Schluß betrachtet er einige Sonderfälle: Das gleichschenklige Trapez, in dem die Summe der Schenkel gleich der Summe der Basen ist, die einem Kreis ein- oder umbeschriebenen Trapeze, das Trapez mit einem rechten Winkel und das Trapez, in dem die Differenz zweier gegenüberliegender Winkel gleich einem Rechten ist. *Zacharias.*

Thébault, Victor: A propos du tranchet d'Archimède. *Ann. Soc. sci. Bruxelles, Sér. I* 64, 5—12 (1950). *Mathesis* 59, Suppl. 1—8 (1950).

Verf. erweitert Eigenschaften des Arbelos von Archimedes auf eine dreidimensionale Figur und kommt dabei zu folgenden Ergebnissen: 1. Vier Kugeln (O_a) , (O_b) , (O_c) , (O_d) , deren Mittelpunkte in einer Ebene P liegen, berühren sich zu je dreien. Je drei von ihnen werden von einer von vier Kugeln (O'_a) , (O'_b) , (O'_c) , (O'_d)

berührt. Dann sind die Treffpunkte A, B, C, D der auf P senkrechten Durchmesser der vier ersten Kugeln mit den entsprechenden Kugeln (O'_a), unter P , (O'_b), (O'_c), (O'_d) über P die Ecken eines orthozentrischen Tetraeders. — 2. Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz von vier Kugeln (ω_a), (ω_b), (ω_c), (ω_d), die sich zu je dreien und die Umkugel eines Tetraeders $T \equiv ABCD$ in den Ecken A, B, C, D berühren, ist, daß $BC \cdot DA = CA \cdot DB = AB \cdot DC$, d. h. daß das Tetraeder isodynamisch ist. Es gibt zwei Quadrupel solcher Kugeln. Sie entsprechen den beiden Tripeln der Lucasschen Kreise im Dreieck. *Zacharias* (Quedlinburg).

Court, Nathan Altshiller: Un tétraèdre spécial „de Darboux“. *Mathesis* 59: 13—17 (1950).

Schneiden sich die Normalen eines veränderlichen, einem Dreieck umbeschriebenen Kegelschnitts in den Ecken des Dreiecks in einem Punkt, so ist der Ort dieses Punktes eine Kubik, die „Kubik von Darboux“. Ein „besonderes Darboux'sche Tetraeder“ ist ein solches, dessen Höhenfußpunkte auf den Darboux'schen Kubiken der Tetraederflächen liegen. In jeder Fläche eines solchen Tetraeders gibt es einen durch die Ecken gehenden Kegelschnitt, dessen Normalen in diesen Ecken durch den Höhenfußpunkt des Tetraeders gehen. Diese 4 Kegelschnitte liegen auf einer Quadrik, deren Normalen in den Tetraederecken die orthozentrischen Geraden der entsprechenden Trieder sind. Die 12 Höhenfußpunkte der vier Dreiecke eines besonderen Darboux'schen Tetraeders liegen auf einer Quadrik, und umgekehrt. Ein solches Tetraeder und das Tetraeder der Höhenschnittpunkte seiner 4 Dreiecke sind windschief homolog (und umgekehrt), d. h. die Verbindungslinien ihrer entsprechenden Ecken bilden ein hyperboloidisches Quadrupel. In ein besonderes Darboux'sches Tetraeder und nur in ein solches kann man eine die Flächen in ihren Höhenschnittpunkten berührende Quadrik beschreiben. Nur für ein solches Tetraeder gilt auch, daß ihm eine Quadrik umbeschrieben werden kann, deren Berührungsebene in den Tetraederecken die Gegenflächen in den trilinearen Polaren ihrer Höhenschnittpunkte schneiden. *Zacharias* (Quedlinburg).

Goldberg, Michael: Tubular linkages. *J. Math. Phys.*, Massachusetts 26: 10—21 (1947).

Projizieren wir ein (nicht unbedingt ebenes) Viereck senkrecht auf zwei Ebenen. Die Projektionsstrahlen umhüllen eine polyedrische Fläche P , die einem gebrochenen Rohr ähnlich ist. Nehmen wir an, daß die acht starr gedachten Vierecksflächen von P längs den zwölf Kanten beweglich aneinander gefügt sind. Verf. untersucht die Frage, wann P im ganzen deformierbar ist. Es werden mehrere Typen derartiger beweglicher Rohre angegeben, von denen einige auch von dem Bricard'schen beweglichen Oktaeder hergeleitet werden. Weiterhin werden anstatt der vierseitigen auch die einfachsten Typen der sechs- und achtseitigen beweglichen Rohre sowie auch mehrfach gebrochene Rohre betrachtet. Die Arbeit ist mit einer Reihe von Modellphotographien illustriert. *L. Fejes Tóth* (Veszprém, Ungarn).

Bottema, O.: Die Prismoide. *Simon Stevin, wis. natuurk. Tijdschr.* 25, 153—160 (1947) [Holländisch].

Sind zwei n -Ecke V_1, V_2 gegeben, in denen entsprechende Seiten parallel sind, so heißt das Polyeder, das man durch Verbinden entsprechender Ecken erhält, ein Prismoid. Sind O_1, O_2 die Flächeninhalte von V_1, V_2 , so wird der Flächeninhalt des Parallelschnitts, welcher die Höhe h im Verhältnis $\lambda:\mu$ mit $\lambda + \mu = 1$ teilt, durch eine quadratische Form $O_1\lambda^2 + 2O_{12}\lambda\mu + O_2\mu^2$ gegeben. Es wird das Prismoid in eine Ebene parallel projiziert — O_{12} ist dann der gemischte Flächeninhalt von V_1, V_2 — und für konvexe V_1, V_2 ein elementarer Beweis der Minkowskischen Ungleichung $O_{12}^2 \geq O_1 O_2$, also der Nicht-Definitheit der genannten Form gegeben. Es ergibt sich auch, daß das Gleichheitszeichen nur gilt, wenn V_1, V_2 homothetisch sind, also das Prismoid ein Pyramidenstumpf ist; bei $n = 3$ ist dies nach dem Satz von Desargues stets der Fall. Für konvexe Prismoide folgen die Ungleichungen

$\sqrt{M} \geq \frac{1}{2}(\sqrt{O_1} + \sqrt{O_2})$ für den Flächeninhalt $M = (O_1 + 2O_{12} + O_2)/4$ des mittleren Parallelschnitts und $J \geq h(O_1 + \sqrt{O_1 O_2} + O_2)/3$ für den Inhalt.

Bachmann (Kiel).

Christov, Chr. Ja.: Über eine Abhängigkeit zwischen dem Inhalt eines Simplex und den Inhalten seiner Seitenflächen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **73**, 25—28 (1950) [Russisch].

Während das Volumen U eines n -dimensionalen Simplexes durch seine Kantenlängen ausdrückbar ist, ist die entsprechende Vermutung von Menger, daß U auch durch die Volumina der $(n-2)$ -dimensionalen Seitensimplexe bestimmt ist, durch Wald [Ergebn. math. Kolloq. Wien **4**, 32—34 (1933)] widerlegt worden. Demgegenüber drückt Verf. U^2 durch $U_p^2, U_q^2, U_t^2, U_{pq}^2, U_{pt}^2, U_{qt}^2, U_{pqt}^2$ aus, wobei U_p bzw. U_{pq} bzw. U_{pqt} das Volumen der $(n-1)$ - bzw. $(n-2)$ - bzw. $(n-3)$ -dimensionalen Seite des Simplexes ist, die von den von der Ecke p bzw. den Ecken p, q bzw. den Ecken p, q, t verschiedenen Ecken des Simplexes aufgespannt wird.

Burger (Frankfurt a. M.).

Fejes Tóth, László: Some packing and covering theorems. Acta sci. math., Szeged **12 A**, L. Fejér et F. Riesz LXX annos natis dedic., 62—67 (1950).

The au. generalizes two results due to A. Thue (Om nogle geometrisk tal-theoretiske Theoremer, Naturforskermode **1892**, 352—353), and R. Kershner, [Amer. J. Math. **61**, 665—671 (1939); this Zbl. **21**, 114], respectively, and proves the following results: (The same letter is used for a region, and its area): Let d be a convex domain, h the circumscribed hexagon of smallest area, and H the inscribed hexagon of largest area. Let h be a convex polygon of at most six sides. Then at most h/h domains congruent to d can be inscribed in h such that no two of them overlap; and it requires at least h/H domains congruent to d to cover h completely provided the boundaries of any two of these domains intersect in at most two points. These results can be further generalized, e. g. to packings and coverings by means of circles of different radii. — The proofs are based on a theorem by C. A. Dowker [On minimum circumscribed polygons, Bull. Amer. math. Soc. **50**, 120—122 (1944)]. — The reference in footnote 8 to work by K. Mahler is false; the paper referred to is by C. A. Rogers and is to appear in Acta mathematica (The closest packing of convex two-dimensional domains).

Mahler (Manchester).

Algebraische Geometrie:

Libois, P.: La synthèse de la géométrie et de l'algèbre. Centre Belge Rech. math., Colloque Géom. algébrique, Liège 19, 20 et 21 déc. 1949, 143—153 (1950).

Verf. bemerkt mit Berufung auf Monge, daß immer die grundsätzliche Möglichkeit bestehe, den Inhalt der (algebraischen) Geometrie in die Algebra zu übersetzen und umgekehrt, mit Berufung auf Enriques, daß die algebraische Geometrie eine qualitative Lehre der algebraischen Gleichungen und Funktionen sei und die natürliche Fortsetzung der Algebra bilde. Verf. unterscheidet demnach in der algebraischen Geometrie den Inhalt, nämlich die Algebra in ihrem heute sehr erweiterten Umfang, und die Methode, diesen Inhalt zu studieren; deren gebe es drei, nämlich die algebraische Methode (im engeren Sinn), welche mit den Begriffen Addition und Multiplikation operiert, ferner die geometrische Methode, welche mit Raumanschauung und Gruppenbegriff (Erlanger Programm) arbeitet, endlich die abstrakte Methode, welche jeden Begriff, der dem zu untersuchenden Gegenstand fremd ist, ausschaltet. — Im folgenden wird besonders der Begriff der algebraischen Mannigfaltigkeit (AM) diskutiert, für den verschiedene Definitionen existieren und möglich sind, je nach dem projektiven oder dem birationalen Standpunkt. Definiert man eine AM als Nullstellengebilde eines Ideals, so besteht eine umkehrbar eindeu-

tige Zuordnung zwischen AM und denjenigen Idealen, die Durchschnitte von Primidealen sind (idéale semi-premier). Erweitert man den Begriff des Punktes im Sinne von Noether-Enriques (Hinzunahme der unendlich benachbarten Punkte), so ergibt sich eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen AM und „Vollideale“ im Sinne von Zariski (dies. Zbl. 18, 201). Um den birationalen Transformationen von Flächen gerecht zu werden, müsse der Punktbegriff als besonderer Fall des Kurvenbegriffes gefaßt werden [P. Libois et P. Defrise, C. r. Congr. Sci. Math. Liège, 17—22. VII. 1939; dies. Zbl. 26, 68]. Gröbner (Innsbruck).

• Severi, Francesco: Grundlagen der abzählenden Geometrie. Ins Deutsche übertragen von Wolfgang Gröbner. (Mathematische Forschung 1, Heft 2). Wolfenbüttel: Wolfenbütteler Verlagsanstalt 1948. 132 S., kart. DM 8.—.

Es handelt sich um eine Neubearbeitung einer 1940 erschienenen, nur für einen engeren Kreis von Fachgenossen bestimmten Abhandlung (dies. Zbl. 26, 372). In der jetzigen Form wendet sich die von W. Gröbner ins Deutsche übertragene Arbeit an einen größeren Leserkreis; sie enthält dementsprechend zahlreiche erläuternde Zusätze, die auch dem mit den italienischen Methoden weniger vertrauten Leser das Verständnis erleichtern sollen. Allerdings dürfte eine gewisse Bekanntschaft mit den Grundproblemen und Hauptbegriffsbildungen der algebraischen Geometrie auch bei der neuen Fassung für eine erfolgreiche Lektüre Vorbedingung sein. — Das Hauptgewicht liegt nicht auf den Beweisen. Diese werden auch dort, wo sich der Verf. nicht auf Originalpublikationen bezieht, oft nur skizziert. Zweck der Arbeit ist es vor allem, den Leser nicht in den Grundlagen stecken zu lassen, sondern ihn möglichst rasch tief in das Innere des betrachteten Gebietes einzuführen. Der erste Teil (Kap. II—XIII) ist der Entwicklung der allgemeinen Theorie gewidmet, der zweite Teil (Kap. XIV—XX) behandelt das fundamentale Beispiel der Kegelschnittmannigfaltigkeiten, einschließlich der Ausartungsfälle, zu denen z. B. die Mannigfaltigkeit der Linienelemente der Ebene gehört. Im ersten Teil war es für das tiefere Verständnis der Hauptergebnisse nötig, zunächst Begriffe wie den der virtuellen Mannigfaltigkeit oder den der Basis aller Untermannigfaltigkeiten fester Dimension einer gegebenen Trägermannigfaltigkeit, oder auch das Prinzip von der Erhaltung der Anzahl kurz zu behandeln. Was die Höhepunkte der Untersuchung angeht, so weist Verf. in der der Neubearbeitung beigelegten „historisch-kritischen Einleitung“ (Kap. I) nachdrücklich auf die neuartige Weise hin, nach der die unterscheidenden Merkmale der veränderlichen gegenüber den festen Bedingungen bestimmt wurden, auf die Allgemeinheit, die durch die „virtuelle“ Betrachtung der Spezialisierungen einer variablen Bedingung erreicht wird, auf die Auswirkungen, die sein Aufbau für das in einer früher nicht bekannten, allgemeinen Bedeutung verstandene Prinzip von Plücker-Clebsch hat. Als zentrales Fundamentalergebnis aber stellt er mit Recht die Herausarbeitung des folgenden Zusammenhangs in den Vordergrund: „Die Bestimmung der Charakteristiken eines gegebenen Moduls von algebraischen reinen Bedingungen läuft (wenn in den Einbettungsmannigfaltigkeiten keine ausgearteten Elemente auftreten), auf die Lösung des Problems der Basis für die algebraischen reinen (d. i. ungemischten) Mannigfaltigkeiten der gegebenen Dimension hinaus, die in einer vorgegebenen Einbettungsmannigfaltigkeit liegen. Andererseits ist dasselbe Problem gleichwertig mit der Aufstellung eines Bézoutschen Satzes in der Umgebungsmannigfaltigkeit oder auch der Bestimmung eines allgemeinen Korrespondenzprinzips in dieser Mannigfaltigkeit“. (Kap. I, S. 13, wörtliches Zitat). Krull (Bonn).

Samuel, P.: Multiplicités des composantes singulières d'intersection. Centre Belge Rech. math., Colloque Géom. algébrique, Liège 19, 20 et 21 déc. 1949, 87—90 (1950).

Es werden die Hauptresultate einer Verallgemeinerung der Vielfachheitstheorie von Chevalley und A. Weil besprochen, die es vor allem gestattet, die Vielfachheit

einer Schnittkomponente M zweier Zykeln X, Y einer im projektiven oder affinen Raum S_n eingebetteten Mannigfaltigkeit A unter der Voraussetzung $\dim(M) = \dim(X) + \dim(Y) - \dim(A)$ auch dann zu definieren, wenn A auf M nicht einfach ist, falls nur in der Nachbarschaft einer Untermannigfaltigkeit N von M sowohl X als auch Y als Schnitte von A mit gewissen Zykeln X_1, Y_1 aus S_n darstellbar sind — eine Bedingung, die in dem von Chevalley und Weil behandelten Falle einer auf A einfachen Mannigfaltigkeit M stets erfüllt ist. — Das Vortragsreferat zerfällt in 3 Teile: Grundgedanken, eine Verallgemeinerung des Prinzips von der Erhaltung der Anzahl; — Bemerkungen über weitere mögliche Verallgemeinerungen, insbesondere Übertragung einzelner Ergebnisse auf den Fall algebroider Mannigfaltigkeiten; — Holotopiegruppen. Auf Einzelheiten dürfte am besten erst im Rahmen einer Besprechung einer ausführlichen Darstellung der skizzierten Theorie einzugehen sein. Hier sei nur kurz darauf hingewiesen, daß bei den Beweisen offenbar ein gelegentlicher Rückgriff auf idealtheoretische Methoden nicht verschmäht wird, und daß sogar bei den Untersuchungen über algebroider Mannigfaltigkeiten sehr spezielle Hilfssätze aus der Idealtheorie herangezogen werden müssen.

Krull (Bonn).

Hodge, W. V. D.: Some recent developments in the theory of algebraic varieties. J. London math. Soc. 25, 143—157 (1950).

*Rede, gehalten vom Vorsitzenden der London Math. Soc. am 17. Nov. 1949. Nach einem geschichtlichen und administrativen Teil der Rede beschäftigt sich Verf. mit einigen neueren Methoden in der Theorie der algebraischen Mannigfaltigkeiten einer beliebigen Anzahl von Dimensionen. Diese Methoden unterscheiden sich von denjenigen früherer Theorien desselben Gegenstandes durch die Einführung von Gedanken, die der modernen Algebra, und insbesondere der Idealtheorie, angehören. Das gestattet nicht nur, alte Begriffe von einem neuen Standpunkte aus zu beherrschen, sondern auch ganz neue Begriffe einzuführen; darunter z. B. die Untersuchung einer algebraischen Mannigfaltigkeit in der Umgebung eines Punktes, der Begriff einer arithmetisch normalen Mannigfaltigkeit, die Auflösung der Singularitäten nach dem Verfahren von O. Zariski, usw.

E. G. Togliatti (Genova).

Berzolari, Luigi: Sopra una certa classe di poligoni inscritibili in una curva algebrica. Ann. Mat. pura appl., Bologna, IV. S. 28, 17—20 (1949).

Verf. bestimmt die Anzahl der Polygone, welche einer im Raume S_r liegenden algebraischen Kurve C des Geschlechtes p und der Ordnung n eingeschrieben werden können, und zwar so, daß der im Eckpunkt P_i des Polygons die Kurve C oskulierende Raum S_{k-1} mit dem oskulierenden Raum S_{r-k} im folgenden Eckpunkt P_{i+1} inzident ist. Es wird $k < (r+1)/2$ vorausgesetzt. Verf. betrachtet auf der Kurve C die Korrespondenz T einander in der Weise entsprechender Punkte A und B , daß der in A oskulierende S_{k-1} mit dem in B oskulierenden S_{r-k} inzident ist. Die Eckpunkte eines m -seitigen Polygons der bezeichneten Art sind dann Fixpunkte von T^m , und umgekehrt ist jeder Fixpunkt von T^m (der nicht schon Fixpunkt einer kleineren Potenz von T ist) Eckpunkt eines m -seitigen Polygons der bezeichneten Art.

Gröbner (Innsbruck).

Tibiletti, Cesarina: Sulle curve multiple risolubili prive di punti di diramazione. Ann. Mat. pura appl., Bologna, IV. S. 27, 87—99 (1948).

Sei $z = z(x, y)$ eine algebraische n -wertige Funktion des Punktes einer gegebenen algebraischen Kurve $f(x, y) = 0$ des Geschlechtes p . Die Funktion $z = z(x, y)$ genügt dann einer algebraischen Gleichung n -ter Ordnung, deren Koeffizienten rationale Funktionen auf der Kurve $f(x, y) = 0$ sind. Verf. bestimmt alle birational verschiedenen $z(x, y)$ unter den folgenden Voraussetzungen: a) n ist eine Primzahl; b) $z(x, y)$ besitzt keine Verzweigungspunkte auf der (Riemannschen Fläche der) Kurve $f(x, y) = 0$, c) die algebraische Gleichung, die $z(x, y)$ als Lösung hat, ist

durch Radikale lösbar. Die Beweise stützen sich wesentlich auf die Betrachtung gewisser unverzweigter $n(n-1)$ -wertiger algebraischer Funktionen auf der Kurve $f(x, y) = 0$, die die metazyklische Gruppe $G_{n(n-1)}$ als Monodromiegruppe besitzen. Conforto (Rom).

Godeaux, Lucien: Des transformations birationnelles et leurs représentations. Časopis Mat. Fys., Praha 75, D 31—D 48 und franz. Zusammenfassg. D 48—D 49 (1950) [Tschechisch].

Résumé de leçons faites en mai 1948, à l'Université „Charles IV“ de Prague. Suivant des idées développées par lui-même (Bull. Soc. Sci. Liège 1942, 268—271, 428—432) et D. Calvo (ibid. 522—547), l'A. étudie des transformations birationnelles en représentant les couples de points homologues par les points d'une surface ou d'une variété à trois dimensions d'un hyperespace. Il considère d'abord, dans le cas des transformations planes, le système complet $|D| = |a + A|$ des courbes d'ordre $n+1$ qui se comportent, aux points-base du réseau homaloïdal $|A|$, comme les courbes de ce réseau (a est une droite, n l'ordre de la transformation). Il rapporte projectivement les courbes D aux hyperplans d'un espace linéaire S_{n+4} et démontre qu'il existe une surface F , d'ordre $2n+2$, de S_{n+4} dont les points représentent les couples de points homologues dans la transformation. Aux droites et aux courbes A du réseau homaloïdal du plan correspondent sur F resp. des courbes C et C' , rationnelles, normales, d'ordre $n+1$. A un point-base O de la transformation, multiple d'ordre s , aux tangentes variables avec les courbes A , correspond sur F une courbe G , rationnelle, normale, d'ordre s . En considérant des courbes A (resp. des courbes fondamentales Ω_i), d'une part, comme appartenant au système linéaire $|n \cdot a|$ (resp. $|s'_i a_i|$), et d'autre part, comme les transformées des droites (resp. des points infiniment voisins de O_i) et tenant compte de leur passage par les points fondamentaux, on déduit sur F des relations qui peuvent être écrites symboliquement sous la forme

$$\begin{aligned} (1) \quad & \begin{cases} C' = nC - s_1 G_1 - s_2 G_2 - \dots - s_r G_r, \\ G_{\kappa'} = s'_{\kappa'} C - \alpha_{1\kappa'} G_1 - \alpha_{2\kappa'} G_2 - \dots - \alpha_{v\kappa'} G_v \quad (\kappa' = 1, 2, \dots, v), \end{cases} \\ (2) \quad & \begin{cases} C = nC' - s'_1 G'_1 - s'_2 G'_2 - \dots - s'_r G'_r, \\ G_{\kappa} = s_{\kappa} C - \alpha_{\kappa 1} G'_1 - \alpha_{\kappa 2} G'_2 - \dots - \alpha_{\kappa v} G'_v \quad (\kappa = 1, 2, \dots, v). \end{cases} \end{aligned}$$

Les relations (2) étant une conséquence des formules (1), on obtient plusieurs équations entre les caractères de la transformation, équations connues de la théorie des transformations birationnelles du plan. On aura d'autres formules en étudiant la jacobienne C_j et C'_j du réseau de courbes $|C|$ et $|C'|$. — Le procédé analogue est employé dans le cas des transformations de l'espace. Les couples de points homologues dans la transformation sont représentés par les points de la variété V à trois dimensions, d'ordre $3(n+n') + 2$, appartenant à un espace linéaire S_r (n, n' sont des ordres resp. de la transformation directe et réciproque, pour r on ne peut fixer qu'une limite inférieure). Par l'étude des surfaces G_i qui représentent sur V des points infiniment voisins de points fondamentaux isolés O_i de la transformation, des surfaces H_j correspondant sur V aux courbes fondamentales γ_j de première espèce et des surfaces M_k correspondant sur V aux courbes fondamentales Γ_k de seconde espèce, on déduit deux groupes d'égalités symboliques

$$\begin{aligned} (3) \quad & \begin{cases} F' = nF - r_1 G_1 - \dots - r_h G_h - s_1 H_1 - \dots - s_k H_k - \tau_1 M_1 - \dots - \tau_l M_l, \\ G'_i = p_i F - r_{1i} G_1 - \dots - r_{hi} G_h - s_{1i} H_1 - \dots - s_{ki} H_k - \tau_{1i} M_1 - \dots - \tau_{li} M_l \\ \quad (i = 1, 2, \dots, h'), \\ H'_i = q_i F - \varrho_{1i} G_1 - \dots - \varrho_{hi} G_h - \sigma_{1i} H_1 - \dots - \sigma_{ki} H_k - t_{1i} M_1 - \dots - t_{li} M_l \\ \quad (i = 1, 2, \dots, k'), \end{cases} \\ (4) \quad & \begin{cases} F = n'F' - r'_1 G'_1 - \dots - r'_{h'} G'_{h'} - s'_1 H'_1 - \dots - s'_{k'} H'_{k'} - \tau'_1 M_1 - \dots - \tau'_{l'} M_{l'}, \\ G_i = p'_i F' - r'_{1i} G'_1 - \dots - r'_{h'i} G'_{h'} - s'_{1i} H'_1 - \dots - s'_{k'i} H'_{k'} - \tau'_{1i} M_1 - \dots - \tau'_{li} M_{l'} \\ \quad (i = 1, 2, \dots, h), \\ H_i = q'_i F' - \varrho'_{1i} G'_1 - \dots - \varrho'_{h'i} G'_{h'} - \sigma'_{1i} H'_1 - \dots - \sigma'_{k'i} H'_{k'} - t'_{1i} M_1 - \dots - t'_{li} M_{l'} \\ \quad (i = 1, 2, \dots, k). \end{cases} \end{aligned}$$

Elles donnent des relations entre des caractères de la transformation et on aura d'autres en étudiant la jacobienne F_j et F'_j du système homaloïdal $|F|$ et $|F'|$ de surfaces sur V , correspondant respectivement aux plans et aux surfaces homoloïdales de la transformation. Il faut ajouter qu'on suppose toujours que tous les cônes tangents aux points-base et tous les plans tangents le long des courbes-base de la transformation soient variables. — Dans le cas d'une transformation involutive du plan (et de l'espace), la surface F (la variété V) est conservée par une homographie harmonique de l'hypermpace S_{n+4} (S_r). Les deux axes ponctuelles de cette homographie conduisent à deux systèmes linéaires $|D_0|$, $|D_1|$ de courbes (surfaces) appartenant à l'involution I_2 engendrée par la transformation involutive dans le plan (dans l'espace). — La construction de la surface F (de la variété V) subsiste même dans le cas, si l'on abandonne des hypothèses faites, dans ce qui

précède, des points fondamentaux (des points et des courbes fondamentales), mais la surface F (la variété V) peut acquérir des points singuliers. (Autoreferat.)

Scott, D. B.: The united curve of a point-curve correspondence on an algebraic surface, and some related topological characters of the surface. Proc. London math. Soc., II. S. 51, 308—324 (1950).

Diese Abhandlung kann, wenn sie auch einen anderen Titel trägt, als eine Fortsetzung einer Untersuchung des Verf. über Punkt-Kurven-Korrespondenzen auf algebraischen Flächen (dies. Zbl. 35, 373) betrachtet werden; die Beziehungen zwischen beiden Untersuchungen sind in der Tat sehr eng. Grund- und Anfangsgedanke ist der topologische Ausdruck: $U \approx T(x) + T^{-1}(x) + Q_T$ der Doppelkurve U einer Punkt-Kurven-Korrespondenz T auf einer algebraischen Fläche F , Ort der Punkte x . In der im § 3 entwickelten Ausrechnung des obigen Ausdrucks für die Kurve U erscheint die Kurve Q_T ; diese gehört einem gewissen Modul Q an, der, in der einfachsten Form, als Gesamtheit aller derjenigen algebraischen Kurven von F definiert werden kann, deren jede eine Summe von Schnittkurven von dreidimensionalen Zykelpaaren ist. — Im § 2 wird eben der Modul Q untersucht und mit einem anderen Modul O in Verbindung gesetzt; O besteht aus denjenigen algebraischen Kurven von F , deren Schnitte mit dreidimensionalen Zykeln zu Null homologe 1-Zykeln sind. Q und O verhalten sich den birationalen Transformationen von F in sich selbst gegenüber verschieden; Q und O gehören dem g -dimensionalen Modul A der Homologienklassen von algebraischen Kurven von F an. Der Modul A kann die direkte Summe von Q und O sein oder nicht; im ersten Falle haben Q und O nur die Kurve Null gemein, sonst haben sie einen Untermodul $Q \wedge O$ gemein, dessen Dimension ein Charakter von F ist, den Verf. mit dem Namen „overlap“ bezeichnet; dieser Charakter ist gleich 1, wenn F mit einer Regelfläche birational äquivalent ist; kann er größer als 1 sein? Es gibt Flächenklassen, für welche Q nur die Mehrfachen einer einzigen Kurve von F enthält; diese Kurve erscheint dann als eine Art topologischer kanonischer Kurve von F ; ist sie vielleicht ein Mehrfaches einer algebraischen kanonischen Kurve? — Im § 4 werden einige Beziehungen ausgerechnet, die die mit den zweidimensionalen transzendenten Zykeln verbundenen Matrizen miteinander verbinden: diese Beziehungen werden im § 5 in dem Falle verifiziert, daß F die Fläche der Punktepaare einer elliptischen Kurve ist.

E. G. Togliatti (Genova).

Mathieu, Paulette: Extension de la correspondance involutive de Reye dans l'espace à cinq dimensions. C. r. Acad. Sci., Paris 230, 1567—1569 (1950).

Fortsetzung einer Untersuchung über eine besondere algebraische (2,1)-Transformation R zwischen zwei Räumen S_5, S'_5 und über die betreffende Involution I im Raume S_5 (dies. Zbl. 35, 373). Hier werden die Mannigfaltigkeiten untersucht, die einer Geraden, einer Ebene, einem Raume S_3 , einer Hyperebene sowohl in der Involution I als auch in der Transformation R und in ihrer umgekehrten Transformation entsprechen. Es werden auch verschiedene besondere Lagen jener Geraden, Ebenen, S_3, S'_4 betrachtet. Es folgen noch weitere Einzelheiten über I und R ; darunter die Untersuchung der in I invarianten Geraden. *E. G. Togliatti.*

Segre, Beniamino: Problèmes arithmétiques en géométrie algébrique. Centre Belge Rech. math., Colloque Géom. algébrique, Liège 19, 20 et 21 déc. 1949, 123—142 (1950).

Verf. weist in diesem Vortrag neuerdings auf die vielfachen Zusammenhänge zwischen zahlentheoretischen Problemen und der Theorie der algebraischen Mannigfaltigkeiten hin und zeigt als erstes Beispiel die Lösung des diophantischen Problems $x^2 + y^2 = x_2^2 + y_2^2 = x_3^2 + y_3^2$, $x_1^3 + y_1^3 = x_2^3 + y_2^3 = x_3^3 + y_3^3$ (vgl. B. Segre, dies. Zbl. 37, 28]. — Ferner entwickelt Verf. neue Ergebnisse seiner Forschung über quadratische Formen $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ in einem kommutativen Körper K beliebiger Charakteristik (vgl. auch E. Witt, dies. Zbl. 15, 57, wo jedoch die Charakteristik 2

ausgeschlossen ist). Ist $d - 1$ die maximale Dimension der auf f liegenden und zu K gehörenden linearen Räume ($d = 0$ bedeutet, daß f „leer“ ist, d. h. keine Punkte mit Koordinaten aus K enthält), $r - 1$ die Dimension des singulären Raumes von f ($d \geq r \geq 0$), so nennt Verf. $h = d - r$ den ersten und $k = n - 2h - r$ (≥ 0) den zweiten Trägheitsindex der quadratischen Form f in K . Dann kann f durch eine lineare homogene Substitution der Variablen über K in die Form

$$y_1 y'_1 + y_2 y'_2 + \cdots + y_h y'_h + \varphi(z_1, z_2, \dots, z_k)$$

transformiert werden, wo φ leer über K ist. Verf. beweist u. a., daß zwei über K äquivalente Formen immer die gleichen Trägheitsindizes haben. Ist K endlich, so kann k nur die Werte 0, 1, 2 annehmen. — Eine algebraische Mannigfaltigkeit V , welche im engeren Sinne (d. h. ohne Ausnahmen) birational äquivalent (über K oder einer passenden Erweiterung von K) mit einem linearen Raum U ist, nennt Verf. eine „Mannigfaltigkeit von Severi-Brauer“, und stellt die Frage, unter welchen Bedingungen die Transformation auf U innerhalb K (oder einer möglichst einfachen Erweiterung von K) ausgeführt werden kann. Die in einem Vortrag des Verf. (Paris, Sept. 1949) gegebene Antwort wird hier auf „verallgemeinerte Mannigfaltigkeiten von Severi-Brauer“ ausgedehnt, d. h. auf Mannigfaltigkeiten, die einer Hyperfläche birational äquivalent im engeren Sinne sind. Gröbner.

Severi, Francesco: *Fondamenti per una teoria generale dei connessi*. Acta Salamantic., Ci., Sec. Mat. 1950, Nr. 3, 28 S. (1950).

Eine Mannigfaltigkeit, die als Untermannigfaltigkeit dem Produkt von zwei oder mehr algebraischen Mannigfaltigkeiten angehört, heißt ein Konnex. Die einfachsten Konnexe sind die Untermannigfaltigkeiten von Segreschen Mannigfaltigkeiten (Produkte von q linearen Räumen). Algebraisch werden die Konnexe durch Gleichungssysteme definiert, die in je q Reihen von Variablen $x_0^{(i)}, x_1^{(i)}, \dots, x_{r_i}^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, q; q \geq 2$) homogen sind. Sie können daher auch als Korrespondenzen zwischen algebraischen Mannigfaltigkeiten gedeutet werden. Verf. stellt in dieser Arbeit die Grundlinien einer allgemeinen Theorie dieser Konnexe dar, und zwar besonders für die Untermannigfaltigkeiten höchster Dimension $t - 1$ einer Segreschen Mannigfaltigkeit V_t , welche das Produkt von q linearen Räumen S_1, \dots, S_q der Dimensionen r_1, \dots, r_q ist ($t = r_1 + \dots + r_q$). V_t hat die Ordnung $t! / r_1! \cdots r_q!$ und ist in einen linearen Raum S_ϱ der Dimension $\varrho = \prod (r_i + 1) - 1$ eingebettet. Irgendeine Untermannigfaltigkeit W_{t-1} der reinen Dimension $t - 1$ von V_t wird durch eine einzige Gleichung $f(x'; x''; \dots; x^{(q)}) = 0$ dargestellt, die in jeder Variablenreihe $x^{(i)}$ (Koordinaten von S_i) homogen vom Grade n_i ist. Sind sämtliche n_i einander gleich, so ist W_{t-1} der vollständige Schnitt von V_t mit einer Hyperfläche des Raumes S_ϱ . Es folgt leicht, daß alle W_{t-1} mit festen Indizes n_i ein vollständiges lineares System der Dimension $\prod \binom{n_i + r_i}{r_i} - 1$ bilden. Die besonderen (ausgearteten) Konnexe I_j , welche durch eine lineare Gleichung $f_j(x^{(i)}) = 0$ in den Variablen $x^{(i)}$ allein definiert sind, bilden eine Basis für die $(t - 1)$ -dimensionalen Konnexe, so daß $W_{t-1} \equiv n_1 I_1 + n_2 I_2 + \dots + n_q I_q$ im Sinne der linearen Äquivalenz gilt. Daraus leitet Verf. den Satz von Bézout für Konnexe, d. h. für mehrfach homogene Gleichungssysteme ab (vgl. den Satz für $q = 2$ bei v. d. Waerden, dies. Zbl. 36, 373). Es folgt die Postulationsformel für V_t (vgl. L. S. Goddard, dies. Zbl. 29, 413) und einige weitere Ausführungen über die bereits von Godeaux [Bull. Soc. Sci. Liège 18, 20—24 (1949); 11, 74—83 (1942); dies. Zbl. 27, 334] und Bompiani (dies. Zbl. 30, 66) untersuchten verallgemeinerten Segreschen Mannigfaltigkeiten. Gröbner.

Giambelli, Giovanni: *Problemi di Clebschiani di spazi*. Ann. Mat. pura appl., Bologna, IV. S. 29, 163—170 (1949).

Verf. untersucht Gleichungen und Gleichungssysteme, die in mehreren Reihen von Variablen homogen sind (Konnexe). Insbesondere werden Gleichungssysteme

untersucht, welche durch Nullsetzen aller Determinanten gegebener Ordnung einer Matrix, deren Elemente Formen passender Grade sind, entstehen. Für die entsprechenden Mannigfaltigkeiten hat Verf. bereits in früheren Arbeiten Dimension und Ordnung angegeben [Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fis. mat. natur., V. S. 12, 294—297 (1903); Mem. Ist. Lombardo Sci. Lett., Cl. Sci. mat. natur., III. S. 19 (1904)]. Verf. betrachtet hier besonders den Fall, daß die einzelnen Reihen von Variablen nicht voneinander unabhängige Koordinaten linearer Räume, sondern Graßmannsche Koordinaten k -dimensionaler linearer Unterräume in k -dimensionalen projektiven Räumen sind, und wendet darauf die abgeleiteten Resultate an. Die Publikation einer ausführlichen Abhandlung über diesen Gegenstand wird angekündigt.

Gröbner (Innsbruck).

Zariski, Oscar: Analytical irreducibility of normal varieties. Ann. Math., Princeton, II. S. 49, 352—361 (1948).

\mathfrak{o} bezeichne einen Stellenring (Krull, dies. Zbl. 19, 289) und \mathfrak{o}^* die Komplettierung von \mathfrak{o} in bezug auf die Potenzen des maximalen Ideals der Nichteinheiten. \mathfrak{o} heißt analytisch irreduzibel, wenn \mathfrak{o}^* nullteilerfrei ist. Ein nullteilerfreier Stellenring \mathfrak{o} heißt analytisch unverzweigt, wenn das Nullideal von \mathfrak{o}^* Durchschnitt von Primidealen aus \mathfrak{o}^* ist. Zu jedem Punkte P einer algebraischen Mannigfaltigkeit V gehört ein Stellenring $Q(P/V)$. V heißt analytisch irreduzibel in P , wenn $Q(P/V)$ analytisch irreduzibel ist. V werde im folgenden stets als irreduzibel vorausgesetzt. $Q(P/V)$ ist dann nullteilerfrei. V heißt lokal normal in P , wenn $Q(P/V)$ ganz abgeschlossen (in seinem Quotientenkörper) ist. Verf. setzt sich den Beweis folgenden Satzes zum Ziel: Wenn V lokal normal in P ist, so ist V analytisch irreduzibel in P . — Verf. beweist zunächst das bereits von Chevalley [Trans. Amer. math. Soc. 57, 1—85 (1945)] bewiesene Resultat: $Q(P/V)$ ($P \in V$, V irreduzibel, keine weitere Voraussetzung) ist analytisch unverzweigt. Für den weiteren Beweis ist die folgende Beziehung (4) von Bedeutung: (4) $(\mathfrak{P}_i^* + \mathfrak{P}_j^*) \cap \mathfrak{o} \neq (0)$, wobei $\mathfrak{o} = Q(P/V)$ und $\mathfrak{P}_i^*, \mathfrak{P}_j^*$ zwei verschiedene zum Nullideal von \mathfrak{o}^* gehörige Primideale sind. Geometrisch ist diese Beziehung so zu interpretieren: $\mathfrak{P}_i^*, \mathfrak{P}_j^*$ entsprechen zwei verschiedene analytische Zweige von V durch P , der Durchschnitt dieser Zweige bestimmt eine kleinste, ihn umfassende, algebraische Teilmannigfaltigkeit von V , die zur singulären Mannigfaltigkeit von V gehört und nicht mit V identisch ist. — Verf. stellt zum Schluß der Arbeit noch eine Frage bezüglich einer eventuellen Verallgemeinerung seines Satzes: \mathfrak{o} sei ein nullteilerfreier ganz abgeschlossener Stellenring. Ist \mathfrak{o}^* nullteilerfrei? Für einen ganz abgeschlossenen Stellenring \mathfrak{o} , der als Stellenring eines Punktes einer irreduziblen algebraischen Mannigfaltigkeit auftritt, ist nach Verf. \mathfrak{o}^* nullteilerfrei. Ein solcher Stellenring hat die folgenden Eigenschaften: Er ist analytisch unverzweigt, der Restklassenring nach jedem Primideal ist analytisch unverzweigt und die Beziehung (4) gilt. Allgemein gilt: Wenn ein nullteilerfreier, ganz abgeschlossener Stellenring \mathfrak{o} diese Eigenschaften hat, so ist \mathfrak{o}^* nullteilerfrei. Es wäre für die Beantwortung der Frage wichtig, zu untersuchen, inwieweit diese zusätzlichen Eigenschaften in ganz abgeschlossenen, nullteilerfreien Stellenringen von selbst erfüllt sind.

Hirzebruch.

Waerden, B. L. van der: Les variétés de chaînes sur une variété abstraite. Centre Belge Rech. math., Colloque Géom. algébrique, Liège 19, 20 et 21 déc. 1949, 79—85 (1950).

Sind J_1, \dots, J_t gleichdimensionale, unzerlegbare (d. h. absolut irreduzible) Mannigfaltigkeiten, so ist unter einer Kette (chaîne) eine formal mit positiven ganzen Zahlen n_i gebildete Summe $n_1 \cdot J_1 + \dots + n_t \cdot J_t$ zu verstehen. Verf. zeigt zunächst, wie auf Grund der von W. L. Chow und ihm selbst 1937 gewonnenen Ergebnisse [Math. Ann. 113, 692—704 (1937); dies. Zbl. 16, 40], auf einer irreduziblen Mannigfaltigkeit eines projektiven Raumes algebraische Mannigfaltigkeiten von Ketten definiert werden können, auf die sich alle allgemeinen, von algebraischen

Punktmannigfaltigkeiten her bekannten Theoreme anwenden lassen. Darüber hinaus zeigt er, daß Chows und seine Methoden sich durch einen eleganten Kunstgriff auch auf den unmittelbar nicht zugänglichen Fall anwenden lassen, daß eine (nicht in einen projektiven Raum einbettbare) abstrakte Mannigfaltigkeit im Sinne von A. Weil als Trägerin der Ketten dient. Man hat zunächst zu beachten, daß es nur darauf ankommt, irreduzible Kettenmannigfaltigkeiten zu definieren, und sich dann zu überlegen, daß, analog wie im klassischen Fall der Punktmannigfaltigkeiten, eine irreduzible Kettenmannigfaltigkeit durch die Menge aller Spezialisierungen einer „allgemeinen Kette“ charakterisiert werden kann. Es handelt sich also nur darum, den Begriff der Spezialisierung einer allgemeinen Kette auf Grund der im projektiven Fall gewonnenen Resultate einzuführen — und das ist möglich, weil eine abstrakte Mannigfaltigkeit V im Sinne von A. Weil (grob gesagt) durch die punktweise Identifizierung birational aufeinander bezogener Mannigfaltigkeiten V_α entsteht, wobei jedes einzelne V_α in einen projektiven Raum eingebettet gedacht werden kann. (Der kritische Punkt ist der Nachweis, daß die ganzen Zahlen n_i , die bei der Darstellung einer Kette durch unzerlegbare Komponenten auftreten, birationale Invarianten sind.) — Eine Schlußbemerkung des Vortrags weist auf die Möglichkeit eines bewertungstheoretischen Aufbaus der algebraischen Geometrie hin, der im Falle einer m -dimensionalen Mannigfaltigkeit im wesentlichen die $(m-1)$ -dimensionalen Bewertungen benutzt. *Krull* (Bonn).

Hodge, W. V. D.: On the topology of three-folds whose hyperplane sections have geometric genus zero. *Ann. Mat. pura appl.*, Bologna, IV. S. 29, 115—119 (1949).

Es sei V_m eine algebraische Mannigfaltigkeit von der komplexen Dimension m und ohne Singularitäten in einem S_n . Es sei weiter V_k der Durchschnitt von V_m mit einem allgemeinen S_{n-m+k} von S_n . Lefschetz hat bewiesen, daß ein willkürlicher p -Zykel in V_m ($p \leq m$) homolog ist zu einem p -Zykel in V_p , aber im allgemeinen ist ein p -Zykel in V_m nicht homolog zu einem Zykel, der zu irgendeiner algebraischen Teilmannigfaltigkeit von der komplexen Dimension kleiner als p gehört; wenn das doch der Fall ist, so werden solche Zykeln eingebettete Zykeln genannt. Eins der Hauptprobleme der topologischen Theorie der algebraischen Mannigfaltigkeiten ist die Bestimmung von notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß ein p -Zykel eingebettet sei, aber bis jetzt ist es nur in wenigen Fällen möglich gewesen, diese Frage zu beantworten. In dieser Arbeit beweist Verf.: Wenn eine algebraische Mannigfaltigkeit V_3 , mit nur gewöhnlichen Singularitäten versehen, von der komplexen Dimension drei die Eigenschaft hat, daß ihre hyperebenen Schnitte das geometrische Geschlecht Null haben, so ist jeder 3-Zykel eingebettet. Der ziemlich schwierige Beweis benutzt in ausgedehntem Maße Hilfsmittel, welche von Lefschetz in seinem Buche: „L'analyse situs et la géométrie algébrique“, Paris 1924, entwickelt worden sind. Ein Spezialfall des Satzes bezieht sich auf die kubische Hyperfläche in S_4 . Diese Mannigfaltigkeit hat zehn unabhängige 3-Zykeln und schon Todd (vgl. dies. Zbl. 12, 222) hat gezeigt, daß diese Zykeln alle eingebettet sind. *Gerretsen*.

Roth, L.: On fourfolds with canonical curve sections. *Proc. Cambridge phil. Soc.* 46, 419—428 (1950).

Die hier betrachteten Mannigfaltigkeiten hat Verf. schon untersucht (dies. Zbl. 36, 225), in einer Abhandlung, in der die hier gewonnenen Ergebnisse schon angewendet worden sind. Es handelt sich hier um die V_4^{2p-2} des Raumes S_{p+2} , der 1. Art; ihre allgemeinen Schnittkurven sind kanonische Kurven allgemeiner Art des Geschlechts p : ihre Schnittflächen enthalten nur vollständige Schnittkurven mit Hyperflächen. Solche V_4^{2p-2} sind alle rational, sobald $p > 6$ ist. Ziel des Verf. ist, ihre eindeutigen Abbildungen auf einen Raum S_4 zu bestimmen, um dann zu beweisen, daß $p \leq 10$ sein muß. Nach einigen einleitenden Bemerkungen über die auf V_4^{2p-2}

liegenden Geraden und über die Projektionen der V_4^{2p-2} betrachtet Verf. zunächst den Fall $p = 5$; die betreffende V_4^8 , die wahrscheinlich irrational ist, ist aber unirational; enthält sie eine Ebene π , so wird sie rational; das Abbildungssystem besteht dann aus Hyperflächen 4. Ordnung, die eine feste Fläche 9. Ordnung enthalten. — Es folgen dann, der Reihe nach, die Fälle $p = 7, 8, 9, 10$. — Die V_4^{12} des S_9 wird auf S_4 durch ein System von Hyperflächen 7. Ordnung mit einer Doppelfläche F^8 und fünf einfachen Ebenen abgebildet; falls V_4^{12} eine kubische Regelfläche enthält, haben die Hyperflächen des abbildenden Linearsystems die Ordnung 4 und eine feste rationale Fläche 7. Ordnung gemein. — Auch das Abbildungssystem der V_4^{14} des S_{10} besteht aus Hyperflächen 4. Ordnung mit einer gemeinsamen festen rationalen F^7 (von der vorigen verschieden). — Die Abbildung der V_4^{16} des S_{11} geschieht durch Hyperflächen 9. Ordnung mit einer dreifachen F^5 , einer doppelten F^3 , einer Doppelsebene und vier einfachen Ebenen. Eine andere Abbildung der V_4^{16} , die die Kegelschnitte der V_4^{16} in die Geraden eines Bündels verwandelt, besteht aus Hyperflächen 7. Ordnung mit einem 5-fachen Punkte, einer Doppel- F^7 und fünf einfachen Ebenen. Wenn die V_4^{16} eine F^6 eines Raumes S_6 enthält, hat man als Abbildungssystem ein System von Hyperflächen 4. Ordnung mit einer Basis- F^6 der obigen Art. — Schließlich eine Abbildung der V_4^{18} des S_{12} durch ein ziemlich kompliziertes System von Hyperflächen 9. Ordnung. — Die Arbeit endet mit dem Beweis, daß $p \leq 10$ sein muß.

E. G. Togliatti (Genova).

Togliatti, Eugenio: *Sulle superficie monoidi col massimo numero di punti doppi.* Ann. Mat. pura appl., Bologna, IV. S. 30, 201—209 (1949).

A monoid in S_3 is any irreducible algebraic surface F^n of order n which possesses a $(n-1)$ -fold point. The au. considers monoids F^n with $\frac{1}{2}n(n-1)$ double points and extends to every n a result given by Rohn (1884) for $n = 4$. It is proved that these monoids form two continuous systems whose dimensions are: (a) for odd n , $\frac{1}{2}(n+2)(n+3)$ and $\frac{1}{8}(n+3)(5n+1)+3$; and (b) for even n , $\frac{1}{2}(n+2)(n+3)$ and $\frac{5}{8}n(n+2)+6$. In the case (a), the double points are infinitely near to the $(n-1)$ -fold point; and, in the case (b), they are in a plane curve of order $n/2$. The note ends with a method for the construction of the considered monoids. *Ancochea.*

Vaccaro, Giuseppe: *Ricerche sugli spazi lineari di una ipersuperficie algebrica.* Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. 8, 31—34 (1950).

This Note generalizes the results of another one published by Bompiani with the same title [Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. 1, 16—18 (1946)]. The main result is that if the tangent hyperplanes to a V_{r-1}^n , of S_r , in the points of a S_k constitute a linear system $\infty^{\varrho-1}$, with $\varrho-1 \leq k$, then there exists in S_k a manifold of double (at least) points of dimension $k-\varrho$ and order $(n-1)^{\varrho}$; and this is the necessary and sufficient condition for the existence of a fixed $S_{r-\varrho}$, $r-\varrho \geq k$, tangent in the points of S_k . *Ancochea (Madrid).*

Godeaux, Lucien: *Sur la détermination du système canonique de certaines surfaces algébriques.* Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. S. 35, 966—970 (1949).

Etude du système canonique de la surface F , section de la variété rationnelle V_{n-2}^3 d'équations

$$\left| \begin{array}{c} \varphi_1 \varphi_2 \cdots \varphi_{n-2} \\ \psi_1 \psi_2 \cdots \psi_{n-2} \end{array} \right| = 0,$$

les φ et les ψ étant des formes linéaires, par une forme d'ordre m de S^n passant par μ des plans du système ∞^1 de plans appartenant à V . Si C_2 et C_1 désignent les sections de F par un de ces plans et par une des surfaces S_{n-3} rationnelles découpées sur V par les S^{n-2} d'équations: $\sum_1^{n-2} A_i \varphi_i = 0$, $\sum_1^{n-2} A_i \psi_i = 0$ la représentation plane de la réglée rationnelle section hyperplane de V , permet d'obtenir

ce système canonique $|K|$: $|K| = |(m-3)(C_1 + C_2) + (n-\mu-4)C_2|$. — Si $m=3$, le système canonique est formé avec un faisceau de cubiques elliptiques. Si $m=4$, surface à sections hyperplanes canoniques. Si $\mu = n + m - 7$, système canonique multiple de C_1 . B. d'Orgeval (Grenoble).

Godeaux, Lucien: Remarques sur la construction de surfaces algébriques non-rationnelles de genres zéro. Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. S. 35, 971—975 (1949).

Une involution cyclique d'ordre $p = p_a + 1$, sans points unis appartenant à une surface algébrique F de genres $p_a = p_g$ a pour image une surface F' de genres zéro et bigène $\neq 0$. Sur la surface F les systèmes canonique et bicanonique contiennent des systèmes partiels transformés en eux-mêmes par l'involution, auxquels correspondent sur F' , des systèmes paracanoniques, bicanonique et parabicanoniques. La considération des séries coupées sur une paracanonique par les parabicanoniques, montre que toute parabicanonique est adjointe à une paracanonique, les dimensions de ces systèmes montrent qu'il existe $p-1$ paracanoniques isolées. Donc sur F , le système canonique contient p_a courbes isolées appartenant à l'involution. La démonstration suppose, ce qui est établi à la fin, que le système canonique de F ne soit pas composé avec l'involution. B. d'Orgeval (Grenoble).

Piazzolla Beloch, Margherita: Sul numero delle falde della superficie algebrica. Ann. Mat. pura appl., Bologna, IV. S. 29, 121—123 (1949).

Usufruendo di un noto teorema di Harnack [Math. Ann. 10, 189—198 (1876)] sul numero massimo di circuiti reali di una curva algebrica reale irriducibile l'Autrice osserva che il numero massimo di falde reali d'ordine pari contenenti circuiti d'ordine dispari (falde di prima specie secondo Klein) appartenenti ad una superficie algebrica reale d'ordine $2n$ di S_3 non supera $\frac{1}{2}(2n-1)(2n-2) + 1$. Questo massimo è raggiungibile e sulle superficie dove è raggiunto non esistono falde ulteriori. F. Gaeta (Madrid).

Burniat, P.: Surfaces canoniques quadruples. Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. S. 32, 489—507 (1947).

L'A. costruisce infinite superficie regolari, di genere geometrico qualunque, per le quali il sistema canonico è irriducibile ma composto con un'involuzione ciclica del quart'ordine. Se $\pi_s(x, y) = 0$ è l'equazione di s piani distinti per l'asse delle z e $\Phi_4(x, y) = 0$, $\Phi_6(x, y) = 0$ sono le equazioni di due cilindri con le generatrici parallele all'asse z rispettivamente del quarto e del sesto ordine, con la condizione che per la $\Phi_6(x, y) = 0$ siano rette triple l'asse delle z ed una retta infinitamente vicina a tale asse, si tratta dei due tipi seguenti di superficie: a) la superficie d'equazione $z^4 = \pi_{2n}^2(x, y)\Phi_4(x, y)$, di genere $p_g = p_a = 2n + 1$ ($n \geq 1$) e di genere lineare $p^{(1)} = 8n - 3$; b) la superficie d'equazione $z^4 = \pi_{2n-1}^2(x, y)\Phi_6(x, y)$, dove la retta tripla del cilindro $\Phi_6(x, y) = 0$, infinitamente vicina all'asse delle z , non giace su nessuno dei piani per cui è $\pi_{2n-1}(x, y) = 0$, di genere $p_g = p_a = 2n$ e di genere lineare $p^{(1)} = 8n - 7$. Per tutte le superficie dei tipi a) e b) il sistema canonico è irriducibile ma composto con l'involuzione ciclica del quart'ordine segata dalle parallele all'asse delle z . L'A. studia anche le superficie canoniche quadruple corrispondenti alle superficie dei tipi a) e b) e le relative curve di diramazione.

Conforto (Rom).

Burniat, Pol: Surfaces canoniques multiples abéliennes. Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. S. 33, 435—441 (1947).

L'A. costruisce infinite superficie algebriche di genere geometrico $p_g > 3$, per le quali il sistema canonico è irriducibile ma composto con un'involuzione generata da un gruppo diedrico d'ordine 4 di trasformazioni birazionali. Precisamente: se A_1, A_2, \dots, A_9 sono i 9 punti base di un fascio di cubiche ellittiche, i piani doppi che hanno per curve di diramazione a) una $C_{6a+6}(A_1^{2a+2} \dots A_7^{2a+2} A_8^{2a} A_9^{2a})$, ovvero b) una $C_{6a+6}(A_1^{2a+2} \dots A_8^{2a+2} A_9^{2a-2})$, ovvero c) una $C_{6a+2}(A_1^{2a+2} A_2^{2a} \dots A_9^{2a})$

con $a > 1$ sono superficie del tipo voluto. Per le superficie corrispondenti al caso a) si ha $p_g = 2a + 1$, $p^{(1)} = 8a - 3 = 4p_g - 7$; per i casi b) e c) si ha invece $p_g = 2a$, $p^{(1)} = 8a - 7 = 4p_g - 7$.
Conforto (Rom).

Burniat, Pol: Surfaces canoniques quadruples. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. 8, 203—207 (1950).

The note gives a simple method for the construction of models of the quadruple canonical surfaces with an involution I_4 of order 4 compounded with another involution I_2 of order 2. The construction is made for all values of p_g and of the irregularity.
Ancochea (Madrid).

Vektor- und Tensorrechnung:

● **Lotze, Alfred:** Vektor- und Affinor-Analysis. München: R. Oldenbourg Verlag 1950. 275 S.

Das erste Kapitel handelt über die Vektor- und Affinor-Algebra, wobei der Verf. sich einer direkten Schreibweise bedient. Ein Affinor wird definiert als eine homogene lineare Vektorfunktion, also eine lineare Transformation. Eingehend werden die verschiedenen Arten von Produktbildung besprochen. Kapitel II enthält die Vektor- und Affinor-Analysis, d. h. die Differentialoperationen eines Vektor- und Affinorfeldes zusammen mit verschiedenen Zerlegungsgleichungen für diese Operationen, sowie die bekannten Integralsätze von Stokes, Gauß und Green. Das Weitere des Buches ist den Anwendungen der Vektor- und Affinorrechnung gewidmet. Zuerst die Differentialgeometrie von Kurven und Flächen in R_3 . Sodann die allgemeine Mechanik und die Mechanik deformierbarer Körper und schließlich einige Anwendungen auf das elektromagnetische Feld (Maxwellschen Gleichungen). In einem Anhang werden noch einige Bemerkungen gemacht über eine vierdimensionale Vektorrechnung und ihre Anwendung auf die spezielle Relativitätstheorie. Das Buch enthält ein ausführliches Namen- und Sachregister, aber keine Literaturangaben.
J. Haantjes (Leiden).

● **Os, C. H. van:** Vektoranalysis. Delft: Delftsche Uitgevers Maatschappij 1949. 113 S.; 4,50 f. [Holländisch].

Das Büchlein soll beim Unterricht an der Technischen Hochschule in Delft Verwendung finden und bringt die Elemente der Vektoranalyse, aber keine Matrizen (Dyaden). Abschnitt I, Vektoralgebra, behandelt das Rechnen mit Vektoren; allgemeine Quaternionen werden zwar definiert, aber ihrer Unanschaulichkeit wegen nicht weiter verwendet. Zum Schluß wird die sphärische Trigonometrie mit Hilfe von Vektoren begründet. — Abschnitt II behandelt vor allem die Differentiation von Vektoren, mit einer Reihe von Anwendungen, insbesondere auf die Theorie der Raumkurven, Abschnitt III die Feldtheorie; Kraftlinien, Nablapotential, Potentiale und Vektorpotentiale, Sätze von Gauß und Stokes und andere Integralsätze. Viele Anwendungen, auch auf das stationäre elektromagnetische Feld. — Die Darstellung ist sehr breit und klar, der Nachdruck liegt auf dem Standpunkt des Physikers und Technikers. Trotzdem hätte der Ref. an mancher Stelle einen Hinweis begrüßt, daß die gebrachten Beweise zwar anschaulich einleuchten, aber für den Mathematiker keineswegs allen Anforderungen der Strenge genügen.
Bol (Freiburg i. B.).

● **Finzi, Bruno e Maria Pastori:** Calcolo tensoriale e applicazioni. Bologna: Nicola Zanichelli 1949. VII, 427 p., 2000 lire.

L'ouvrage des géomètres italiens se présente comme un traité à la fois élémentaire et remarquablement complet. Il ne suppose connues que les notions mathématiques habituellement enseignées en première année des Facultés des Sciences ou des Écoles techniques. Il s'ouvre d'ailleurs par un chapitre relatif à l'algèbre vectorielle élémentaire et aux champs vectoriels, qui est un rappel de ces enseignements. — Les deux chapitres suivants sont purement algébriques et consacrés à l'algèbre tensorielle et à la représentation par des tenseurs des opérateurs linéaires dans un espace vectoriel. La présentation de l'algèbre tensorielle est classique: les A.A. commencent par étudier la notion de tenseur double dans l'espace ordinaire rapporté à un repère cartésien orthogonal et la définissent au moyen de trois vecteurs attachés au repère et se transformant, dans un changement de repère, selon la loi de transformation des composantes d'un vecteur. L'algèbre tensorielle est ensuite développée en coordonnées cartésiennes orthogonales, puis reprise en coordonnées curvilignes pour un espace ponctuel euclidien à n dimensions. Peut-être l'introduction des coordonnées curvilignes à ce stade purement algébrique est-elle un peu prématurée? Le chapitre III consacré à la représentation par des tenseurs des opérateurs linéaires dans un espace vectoriel, c'est-à-dire aux rapports entre tenseurs doubles et matrices, est très heureux. Le chapitre IV est relatif à l'analyse tensorielle dans l'espace ponctuel euclidien à n dimensions, rapporté à des coordonnées curvilignes. La différentiation „absolue“ des vecteurs et tenseurs y apparaît avec l'introduction

des symboles de Christoffel usuels. On notera une définition souhaitable de la dérivée par rapport à un point du tenseur d'un champ, ainsi que quelques considérations sur l'intégration tensorielle. — Les chapitres V, VI, VII portent sur la géométrie des variétés riemanniennes et sur ses applications à la géométrie ordinaire des surfaces. La notion de variété est introduite du seul point de vue local de variété plongée, ce qui est peut-être regrettable et interdit toute introduction à des modes de pensée autres que strictement locaux. Les instruments fondamentaux de la géométrie riemannienne (coefficients de rotation de Ricci, coordonnées localement géodésiques, tenseurs de courbure etc. . .) sont analysés d'une manière très complète. Les AA. n'abordent pas la théorie des variétés plongées dans un espace de Riemann. Par contre on trouve, à la fin du chapitre V, une introduction relativement élémentaire à la théorie des espaces à connexion affine et à la géométrie des espaces de Weyl. — Les trois derniers chapitres sont consacrés aux applications, le premier à la Mécanique des systèmes continus (théories des membranes et des plaques comprises), le second à l'électromagnétisme, le troisième aux différents aspects de la théorie de la Relativité. Ce dernier chapitre comporte même quelques pages sur la cosmologie relativiste et sur les essais de théories unitaires (principalement la théorie de Weyl). On notera aux pages 268 et 388 l'existence d'un lapsus regrettable: il semble que la nullité du tenseur R_{ij} de Ricci entraîne le caractère euclidien de l'espace, ce qui est naturellement tout-à-fait incorrect. Le livre comporte à la fin de chaque chapitre un recueil des formules fondamentales rencontrées au cours du chapitre; il se termine par une bonne bibliographie et par un index analytique qui en rend le maniement très commode. *Lichnerowicz (Paris).*

●Lass, Harry: *Vector and tensor analysis*. New York: McGraw-Hill Book Company Inc., 1950. XI, 347 p., \$ 4.50.

Dieses Buch ist geschrieben als Lehrbuch für Studierende der Mathematik, Physik und Mechanik, weshalb der größte Teil den Anwendungen gewidmet ist. Kapitel 1 und 2 handeln über die Vektoralgebra (Summen- und Produktbildungen) und die Vektoranalysis (Gradient, Divergenz und Rotation) in direkter Schreibweise. Als erste Anwendung folgt die Differentialgeometrie von Kurven und Flächen in R_3 , die Definition der geodätischen Linien einbegriffen. Im Kapitel 4 wird nach einer kurzen Einleitung über Punktmengen, Kontinuität, beschränkte Variation, Riemann-Integral, Linienintegral usw. die Bogenlänge einer Kurve definiert und werden die Integralsätze von Stokes, Gauß und Green abgeleitet. Als Anwendungen behandelt Verf. die Theorie des elektromagnetischen Feldes (Kap. 5), die Mechanik des materiellen Punktes und des starren Körpers (Kap. 6) und die Bewegungsgleichungen der Hydrodynamik (Kap. 7). Kapitel 8 und 9 bringen schließlich die Tensoranalysis für eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, wobei Verf. sich der Kern-Index-Methode bedient. Als Anwendung wird die Einsteinsche Gravitationsgleichung betrachtet. Das Buch enthält ein Sachregister und ein kurzes Literaturverzeichnis, das aber nur in englischer Sprache geschriebene Literatur enthält. *J. Haantjes.*

Gerretsen, J. C. H.: *Quaternionen*. Actual. Math. Centrum, Amsterdam, Rapport ZW 1949, 011, 4 S. (1949) [Holländisch].

Rechenregeln, Anwendung auf die sphärische Trigonometrie. Keine neuen Ergebnisse. *Bol (Freiburg i. B.).*

Lowan, Arnold N.: *On the vector-analytical treatment of certain problems*. Scripta math., New York 16, 129—131 (1950).

Boggio, Tommaso: *Sopra due notevoli formule di calcolo vettoriale*. Boll. Un. mat. Ital., III. S. 5, 54—56 (1950).

Die erste der behandelten Formeln bringt die Distributivität des Vektorprodukts zum Ausdruck. Der hier gegebene einfache Beweis, bei welchem das Spat-(Misch-)produkt von drei Vektoren und die Distributivität des skalaren Produkts verwendet werden, findet sich auch bei A. Lotze (dies. Zbl. 37, 231) und ist nicht als neu anzusprechen. Bei der zweiten Formel handelt es sich um den Entwicklungssatz für das doppelte Vektorprodukt aus drei Vektoren. Verf. beanstandet mit Recht, daß bei manchen Autoren aus

$$[[\mathfrak{A} \mathfrak{B}] \mathfrak{C}] = h \cdot \{(\mathfrak{A} \mathfrak{C}) \mathfrak{B} - (\mathfrak{B} \mathfrak{C}) \mathfrak{A}\}$$

mit unzureichender Strenge die Unabhängigkeit des Zahlenfaktors h von \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} geschlossen wird, und führt einen einwandfreien Beweis dafür, daß $h = 1$ ist.

Schönhardt (Stuttgart).

Moreau, Jean-Jacques: *Tenseurs à structure isotrope*. C. r. Acad. Sci., Paris 230, 1734—1735 (1950).

Verf. versteht unter isotropen Tensoren die Skalare, die Tensoren zweiter Stufe, deren Komponenten in der Form $A \delta_{ik}$ gegeben sind, die Tensoren dritter Stufe mit Komponenten $A \varepsilon_{ikl}$, die Tensoren vierter Stufe mit Komponenten $A \delta_{ij} \delta_{kl} + B \delta_{ik} \delta_{jl} + C \delta_{il} \delta_{jk}$, die Tensoren fünfter Stufe mit Komponenten

$$A \varepsilon_{ijk} \delta_{lm} + B \varepsilon_{ilm} \delta_{jk} + C \varepsilon_{ikl} \delta_{mj} + D \varepsilon_{lmj} \delta_{kl} + E \varepsilon_{imk} \delta_{lj} + F \varepsilon_{ilj} \delta_{mk}$$

usw. Dabei bedeutet δ_{ik} den symmetrischen (Kroneckerschen) Einheitstensor, und ε_{ikl} den schiefsymmetrischen Einheitstensor dritter Stufe. Als Beispiel wird ein Tensor aus der Theorie der Viskosität angeführt. (Vgl. Verf. in dies. Zbl. **35**, 229.)

M. Pinl (Dacca).

Hohenberg, Fritz: Über die Zusammensetzung zweier gleichförmiger Schraubungen. *Mh. Math.*, Wien **54**, 221—234 (1950).

Verf. nennt die durch Zusammensetzung zweier gleichförmiger Schraubungen entstehende kontinuierliche Bewegung Helikoidenbewegung (Hb.), die von den Raumpunkten dabei durchlaufenen Bahnkurven Helikoiden (H.). Er stellt den Ortsvektor \mathbf{r} einer H. in Abhängigkeit von den Konstanten der beiden Schraubungen, dem Ausgangspunkt und der Zeit dar und zerlegt ihn additiv in drei Ortsvektoren: den einer sphärischen Trochoide (ein Kegel rollt auf einem andern), den eines „Leitkreises“ und den einer auf einem Kegel liegenden „Leitspirale“. Sodann werden die Flächen aufgestellt, auf denen ∞^2 H. liegen (die sich auf ∞^1 Hb. verteilen). Es gibt drei Arten solcher Flächen: zyklische Flächen und Strahlflächen, die durch Hb. von Kreisen und Geraden entstehen, und Flächen, die durch Schraubungen von Schraublinien entstehen. Nach Berechnung der Geschwindigkeitskomponenten der Hb. werden Formeln für die Konstanten der Momentanschraubung aufgestellt. Als Polflächen ergeben sich i. a. offene, schiefe Strahlschraubflächen. Nach Untersuchung der Beschleunigungen und Berechnung von $\ddot{\mathbf{r}}$ wird die Konstruktion von Umrißlinien der von einer Geraden bei einer Hb. überstrichenen Fläche angegeben und schließlich kurz auf die von einer Ebene bei einer Hb. umhüllte Torse eingegangen. Die Ableitungen der Ebenenkoordinaten nach der Zeit bis zur 2. Ordnung werden angegeben.

Lochs (Innsbruck).

Ghosh, N. N.: Rigid rotation in hyperspace. *Bull. Calcutta math. Soc.* **40**, 116—122 (1948).

Die Bewegungen eines starren Körpers um einen festen Punkt im n -dimensionalen euklidischen Raum werden mittels einer von Ref. schon früher verwendeten Matrizenschreibweise dargestellt. [*Bull. Calcutta math. Soc.* **32**, 110 (1940)]. Ein n -dimensionaler Vektor (x_1, \dots, x_n) wird als $(n+1)$ -reihige schiefsymmetrische Matrix X geschrieben, deren erste Spalte $(0, x_1, \dots, x_n)$ und deren erste Zeile $(0, -x_1, \dots, -x_n)$ ist. Die übrigen Elemente von X sind 0. Daneben werden schiefsymmetrische Matrizen Ω betrachtet, deren erste Zeile und Spalte aus lauter Nullen bestehen. Setzt man $\Delta = e^\Omega$ und bezeichnet Δ_1 die Transponierte von Δ , so läßt sich jede Rotation in der Form $X' = \Delta X + X \Delta_1$ darstellen. Es werden verschiedene Rotationstypen und deren Zusammensetzungen untersucht. *Rinow*.

Sobrero, Luigi: Di una elementare proprietà cinematica analoga al principio di Fermat. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur.*, VIII. S. 8, 360—364 (1950).

Si consideri un moto qualunque \mathfrak{M} di un piano α sovrapposto ad un piano α' che, per convenzione, diciamo fisso. Si sa che \mathfrak{M} si può riprodurre facendo rotolare, senza strisciare, una curva p solidale con α su di una curva p' solidale con α' . Se O è il centro istantaneo di rotazione relativa ad una configurazione C_0 (del resto qualunque) del piano mobile, assunta come iniziale, con che p e p' hanno, relativamente alla C_0 , in comune il punto O e la tangente nello stesso punto, per caratterizzare la configurazione generica C del piano mobile α rispetto ad α' si può assumere l'angolo ε delle tangenti a p ed a p' nei punti Q e Q' di tali curve che, nella C , coincidono col corrispondente centro istantaneo di rotazione. Al tendere di C a C_0 , ε tende a zero; se allora si riguarda ε come infinitesimo principale, ci si può proporre di confrontare con ε la variazione Δ (anch'essa infinitesima) che nel passaggio da C_0 a C subisce la distanza di un punto

qualunque P di α da un punto qualunque P' di α' . In generale, e cioè per una scelta arbitraria della coppia di punti P, P', Δ è di 1° ordine rispetto ad ε . L'A. propone di dire che due punti P e P' sono coniugati di ordine n quando Δ è infinitesimo di ordine n . Considerando il moto inverso di \mathcal{M} , si vede subito il carattere simmetrico della proprietà di coniugio dei due punti P e P' . — Se poi si dice cammino cinematico c dei due punti coniugati P e P' la somma delle loro distanze dal centro istantaneo di rotazione, si può dimostrare che affinché l'ordine di coniugio sia n è necessario e sufficiente che il cammino cinematico c sia costante a meno di infinitesimi di ordine n . — Si riconosce l'analogia di questa proposizione col principio di Fermat dell'ottica geometrica, il quale esprime la stazionarietà del cammino ottico compreso fra un punto P e la sua immagine P' . — Tra già noto che la corrispondenza fra coppie di punti coniugati di 3° ordine è analoga a quella che nella teoria ottica delle lenti sottili sussiste fra un generico punto P di un piano passante per l'asse della lente e la sua immagine P' . — L'A. annunzia un'applicazione del concetto di coniugio cinematico ai meccanismi calcolatori che sarà esposta in una successiva Nota lineea.

G. Lampariello (Messina).

Meyer zur Capellen, W.: Die Bahn des Momentanpols und die Kardanlage. Ingenieur-Arch. 17, 308—316 (1949).

Verf. nennt in Anlehnung an die bekannte Eigenschaft des Momentanpols P der Kardanbewegung, einen unendlich großen Bahndurchmesser R zu besitzen, während dieser i. a. Null ist, ein „Getriebe in Kardanlage“, wenn R zwar nicht unendlich, aber doch wenigstens endlich ist. — Beim Gelenkviereck liegt Kardanlage in den Umkehrlagen oder, wie bereits Reinhold Müller zeigte (Einführung in die theoretische Kinematik, Berlin 1932), der auch erstmalig Formeln für R herleitete, dann vor, wenn das Lot von P auf den Steg $A_0 B_0$ zusammenfällt mit dem Schnitt von $A_0 B_0$ mit der Koppel AB . Verf. zeigt nun allgemein, daß in Kardanlage der Krümmungskreis der beweglichen Polbahn halb so groß ist wie der der festen, der den ersteren umschließt, und daß ferner der Wendekreis zugleich Krümmungskreis der beweglichen Polbahn ist. Besonders bemerkenswert ist aber das weitere Ergebnis, daß in Kardanlage die Kreispunktkurve k (Ort aller Systempunkte, die augenblicklich Bahnstellen mit vierpunktig berührendem Krümmungskreis beschreiben) in P den Wendekreis zum Krümmungskreis hat, während die Mittelpunktkurve (Ort der Krümmungsmittelpunkte von k) in P in einen Kreis α und die Poltangente t zerfällt. Gerade dies letztere Verhalten nimmt Verf. zum Ausgangspunkt einer übersichtlichen Darstellung des Verhaltens des Gelenkvierecks in Sonderlagen und seiner Sonderformen, wobei er unter Verwendung des Satzes von Roberts auch die gemeinsamen Eigenschaften der drei erzeugenden Gelenkvierecke mit erfassen kann. — Den Abschluß bildet eine interessante Untersuchung über stationäre Werte, insbesondere des Wendedurchmessers u. ä. in Kardanlage und die zugehörigen Formen des Gelenkvierecks. — Gemäß den Ausführungen S. 312 unten müßte es Gl. (3) S. 308 im Nenner heißen: $\cos(\beta - \alpha) \cos \gamma - \sin(\alpha + \beta) \sin \gamma$. In Abb. 5 fehlt im Schnitte $\overline{P'T'} \times \overline{HA}$ die Bezeichnung U und in Abb. 11a die von B_0 auf Kreis X . Schließlich sollte es wohl auf S. 313, 3. Zeile von unten $A_0 B_0 P$ (statt ABP) heißen.

Karas (Darmstadt).

Dizioğlu, Bekir: Spezielle R_M -Kurven und ihre Anwendungen. Rev. Fac. Sci. Univ. Istanbul A 14, 49—64 (1949).

In dieser Arbeit gibt Verf. eine Methode an, um die vier homologen Punkte, die bei vier vorgegebenen Lagen eines eben bewegten Systems auf einem Kreis von gegebenem Halbmesser R liegen und von denen es im allgemeinen je sechs Gruppen gibt, in einfacher Weise konstruieren zu können. Diese Punkte ergeben sich bekanntlich als Schnitt der Mittelpunktskurve der gegebenen vier Systemlagen mit dem sog. R_M -Kurven, die zu dreien der Systemlagen gehören und nach H. Alt [Z. angew. Math. Mech. 1, 373—398 (1921)] als Koppelkurven von gewissen Gelenkvierecken erzeugt werden können. Verf. zeigt nun, daß unter dem R_M -Kurvenbüschel für den speziellen Fall, daß das zugehörige Poldreieck ein gleichseitiges ist, Ausartungen vorkommen, die ihre einfache punktweise Konstruktion ohne Benutzung des erzeugenden Gelenkvierecks gestatten. Ist $R = d/\sqrt{3}$ mit d als Seitenlänge des Pol-

dreiecks, so zerfällt R_M in drei Kreise, welche je durch zwei Pole gehen und den dritten zum Mittelpunkt haben, ist jedoch $R = \frac{1}{2} d \sqrt{3}$, so ist R_M eine nach A. E. Mayer [Math. Z. 43, 389—445 (1937); dies. Zbl. 17, 319] leicht konstruierbare Koppelkurve mit je einer Spitze in jedem Pol und mit je einem Berührungspunkt in der Mitte der Seiten des Poldreiecks als Tangenten. Da die praktischen, durch den Arbeitsvorgang gestellten Forderungen oftmals drei Lagen eines Getriebegliedes genau vorschreiben, während über die vierte Lage noch in gewissen Grenzen verfügt werden kann, so kann man, wie Verf. an konstruktiven Ausführungen zeigt, obigen Forderungen durch geringe Parallelverschiebung einer der drei zum Poldreieck gehörigen Systemlagen genügen. An einem praktischen Beispiel der Getriebetechnik wird gezeigt, wie man in den erwähnten Fällen bei Anwendung der mitgeteilten Ergebnisse vorzugehen hat. Karas (Darmstadt).

Myard, Francis: Liaison cinématique réversible, à mouvements loupoyants, entre une rotation continue et n translations rectilignes, alternatives, déphasées, et à loi sinusoïdale. C. r. Acad. Sci., Paris 231, 108—110 (1950).

Beschreibung eines Mechanismus, um die Bewegung von n parallelen Kolben in die Drehbewegung einer zu ihnen parallelen Welle zu übersetzen. Außer ihrer Hin- und Herbewegung rotieren die Kolben um ihre Achsen; sie haben zu den Achsen schräge Stirnflächen, mit denen sie auf der ebenfalls schrägen Stirnfläche F der Welle während der Bewegung aufliegen. Die Koordinierung der Rotation wird durch Zapfen bewirkt, mit denen die Kolben in eine Nut in F eingreifen, die Kraftübertragung erfolgt aber durch die Stirnflächen. Der Bewegungsvorgang ist umkehrbar. Alle sich berührenden Flächen führen gegenseitig Drehgleitbewegungen aus, wodurch die Reibung sehr gering wird. Auf die Bedeutung für Expansionsmaschinen mit Kolben, insbesondere Flugzeugmotoren wird hingewiesen. Lochs (Innsbruck).

Differentialgeometrie in Euklidischen Räumen:

Jarník, Vojtěch: Sur le cercle de courbure. Časopis Mat. Fys., Praha 74, Nr. 1, D 37—D 50 und französ. Zusammenfassg. D 50—D 51 (1949) [Tschechisch].

Le but de cet article n'est pas de donner des résultats absolument nouveaux, mais plutôt de donner aux étudiants une série d'exercices concernant la limite d'une fonction de plusieurs variables. Soit donné un nombre réel x_0 et une fonction réelle $f(x)$; on va désigner $f(x_i)$ par y_i ; P_i va désigner le point $[x_i, f(x_i)]$. On ne suppose rien de la fonction f excepté la continuité au point x_0 . Désignons par $K(x_1, x_2, x_3)$ le cercle passant par les trois points (différents) P_1, P_2, P_3 ; désignons par $K(x_1, x_1, x_2)$ le cercle passant par P_1, P_2 et possédant en P_1 la même tangente que la „courbe“ $y = f(x)$. Désignons par $K(x_1, x_2|n)$ le cercle passant par P_0 et dont le centre est situé au point d'intersection des normales à la courbe $y = f(x)$, construites aux points P_1, P_2 . — Soit K^1 le cercle qui est la limite du cercle $K(x_1, x_2, x_3)$ quand les points x_1, x_2, x_3 , tout en restant différents entre eux, tendent vers x_0 (le mot „cercle“ signifie toujours un cercle à rayon positif et fini, de sorte que p. ex. K^1 n'existe pas au point d'inflexion). D'une manière analogue, on désigne par K^2, K^3, \dots, K^7 resp. la position limite du cercle $K(x_0, x_2, x_3)$ (x_0 est fixe!), $K(x_1, x_1, x_2)$, $K(x_1, x_1, x_0)$, $K(x_0, x_0, x_1)$, $K(x_1, x_2|n)$, $K(x_0, x_1|n)$. Alors les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de K^i peuvent être exprimées comme il suit: 1. Pour K^1 : L'existence de la limite finie

$$\lim_{\substack{[x_1, x_2] \rightarrow [x_0, x_0] \\ x_1 \neq x_2}} \frac{f'(x_2) - f'(x_1)}{x_2 - x_1} \neq 0.$$

Même condition pour K^3 et K^6 . 2. Pour K^4 : $f''(x_0)$ ($\neq 0, = \pm \infty$) existe. Même condition pour K^7 . 3. Pour K^2 : f est continue dans un certain voisinage de x_0 et la limite finie

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^+(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \neq 0$$

existe; ici, $f^+(x)$ est le nombre dérivé supérieur du côté droit (p. ex.). 4. Pour K^5 : L'existence de la limite finie

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^2} \right) - \frac{f'(x_0)}{x - x_0} \neq 0.$$

Il faut encore préciser la notion de la „tangente“ à la „courbe“ $y = f(x)$ au point P_i . Si $f'(x_i)$ existe et est finie, on a la définition habituelle; mais, si $f'(x_i)$ existe et est égale à $+\infty$ ou à $-\infty$, on appelle la droite $x = x_i$ „tangente“ à la „courbe“ au point P_i seulement dans le cas où f est continue au point x_i . Si l'on supprime cette condition de continuité (tout en conservant la condition de continuité au point x_0), on peut construire des exemples bizarres (voir § 4), où le cercle K^4 existe mais n'a rien de commun avec l'idée intuitive du „cercle de courbure“.

(Autoreferat).

Gürsan, Feyyaz: Les évolutoïdes. Boll. Techn. Univ. Istanbul **2**, 79—85 und türkische Zusammenfassg. 79 (1949).

Sei $\alpha(\sigma)$ eine ebene Kurve, σ ihre Bogenlänge, $u(\sigma)$ Einheitsvektor. Verf. betrachtet die Kurve $b = \alpha + \lambda(\sigma)u$ und stellt Differentialgleichungen für ihre Bogenlänge in Abhängigkeit von λ, λ' und den auftretenden Winkeln auf. Evoluten, allgemeine Schleppkurven und Verfolgungskurven sind Sonderfälle hiervon, für die einige z. T. bekannte Aussagen aus dem allgemeinen Ansatz leicht abgeleitet werden.

Gericke (Freiburg i. Br.).

Borsuk, Karol: Sur la courbure totale des courbes fermées. Ann. Soc. Polonaise Math. **20**, 251—265 (1948).

Borsuk, Karol: Correction a mon travail „Sur la courbure totale des courbes fermées“. Ann. Soc. Polonaise Math. **21**, 302 (1949).

Ist C eine zweimal stetig differenzierbare, reguläre, geschlossene Kurve des n -dimensionalen euklidischen Raumes, so gilt für ihre Gesamtkrümmung $\int_C k(s) ds \geq 2\pi$; das Gleichheitszeichen steht dann und nur dann, wenn C eine ebene konvexe Kurve ist. Für $n = 3$ stammt dieser Satz von W. Fenchel [Math. Ann. **101**, 238—252 (1929)]. Verf. gibt einen Beweis für beliebige Dimension n , der auf Polygonapproximationen beruht. In der Berichtigung wird darauf hingewiesen, daß die schwächeren Differenzierbarkeitsvoraussetzungen, unter denen der Beweis von Verf. ursprünglich geliefert worden ist, nicht aufrecht erhalten werden können.

Rinow (Greifswald).

Fáry, István: Sur la courbure totale d'une courbe gauche faisant un noeud. Bull. Soc. math. France **77**, 128—138 (1949).

C désigne une courbe rectifiable de l'espace euclidien E_3 ,

$$C: r(s) = [x(s), y(s), z(s)], \quad 0 \leq s \leq l, \quad r(0) = r(l),$$

admettant partout une tangente, exception faite d'un nombre fini de points D_i correspondant à $t = d_i$, $i = 1, 2, \dots, m$, et telle que $r''(s)$ soit continue sur chaque intervalle fermé $[d_i, d_{i+1}]$. — $\Phi(a, b)$ désignant pour deux vecteurs a et b non nuls de E_3 , l'angle habituel $0 \leq \Phi(a, b) \leq \pi$, la courbure totale $X(C)$ de C est définie comme la variation totale $\int |d\varphi|$ du vecteur unitaire $r'(s)$; ainsi pour un polygone fermé P de sommets A_1, A_2, \dots, A_n ($A_1 = A_n$), $X(P) = \sum_1^n \Phi(\overrightarrow{A_{i-1}A_i}, \overrightarrow{A_iA_{i+1}})$.

Th. I: Pour toute suite P_r de polygones inscrits dans C , admettant les points D_i comme sommets et convergeant vers C , $\lim X(P_r)$ existe et $= X(C)$. Th. II: C_n désignant la projection orthogonale de C sur le plan de vecteur unitaire normal n , $X(C_n)$ étant supposée uniformément bornée pour toutes les directions n , nous avons:

(1) $X(C) = \frac{1}{4\pi} \iint X(C_n) d\omega$, l'intégrale étant étendue à la sphère unitaire S , $d\omega$ représentant l'aire élémentaire sur S . Le théorème de Fenchel [Math. Ann. **101**, 238—252 (1929)] sur la courbure totale des courbes gauches fermées résulte aisément du th. II. Soit C une courbe de E_3 faisant un noeud, ε étant un nombre positif arbitraire, C est approximée par un polygone inscrit P tel que $X(C) + \varepsilon \geq X(P)$, et ayant un noeud. Pour presque toutes les directions n , la projection P_{r_n} s'enroule au moins deux fois autour d'un point de son plan, d'où résulte $X(P_{r_n}) \geq 4\pi$, et grâce à (1) le Th. III: C a une courbure totale $\geq 4\pi$. — Les hypothèses de différentiabilité sur C servent à garantir la validité du Th. I. L'Au. promet des généralisa-

tions; en fait ses résultats reposent sur l'existence d'une limite finie pour les $X(P_r)$, les P_r constituant une suite quelconque de polygones inscrits dans C et tendant vers C . Dans l'application du théorème de convergence de Lebesgue, p. 134, aucune mention n'est faite d'une majorante sommable pour les $X(P_{r_n})$ sur S . *Pauc.*

San Roman, Juan Sancho de: On closed space curves, especially of constant width. Mem. Mat. Inst. „Jorge Juan“, Nr. 10, 67 S. (1949) [Spanisch].

The author studies the closed space curves $x = x(u)$ with continuous turning unit tangent vector $t = t(u)$ and with an involutory one to one correspondence $x \rightarrow x_1$ [$x_1 = x(u_1)$] of the curve on itself such that $(x_1 - x)(t_1 + t) = 0$. Interesting elements of these curves are: the „diametral“ ruled surface

$$\sigma(u, \lambda) = x + \lambda(x_1 - x),$$

the „central“ curve $\gamma(u) = \frac{1}{2}(x_1 - x)$ and the „medial“ curve $\mu(u) = \frac{1}{2}(x_1 + x)$. Many theorems concerning these elements are obtained. For instance, if $\alpha(u)$ denotes the angle between t and $x_1 - x$, $\kappa_g(u)$ denotes the geodesic curvature of the given curve as contained on σ , and we put $D = |x_1 - x|$, the author shows: a) $D = \text{constant}$ implies $\alpha = \pi/2$; b) $|x'(u)| du = |x'(u_1)| du_1$ implies $\kappa_g(u) = \kappa_g(u_1)$. The case in which σ is developable is especially considered. — The second part deals with space curves of constant width. Denote by P the distance from x to the tangent at x_1 , by a the distance from the tangent at x to the tangent at x_1 , by θ the angle between t and t_1 , by $\tau_g(u)$ the geodesic torsion of the curve as contained on σ , and by K, K_1 the Gauss curvatures of σ at x and x_1 . In order that a space curve of the class considered in the first part be of constant width any one of the following conditions is shown to be necessary and sufficient: 1. $D = \text{constant}$; 2. $P = \text{constant}$; 3. $a = \text{constant}$; 4. $\alpha = \text{constant}$; 5. $(1 - P\kappa_g)(1 - P\kappa_{g1}) \equiv \cos^2 \theta$. Many other relations are obtained. For instance: a) $KK_1 = D^{-2} \sin^4 \theta$; b) $D^2 \tau_g \tau_{g1} = \sin^2 \theta$.

Santaló (Buenos Aires).

Sibirani, Filippo: Alcuni tipi di rigate con assegnata linea di gola. Ann. Mat. pura appl., Bologna, IV. S. 30, 261—265 (1949).

Bestimmung derjenigen geradlinigen Flächen, deren Erzeugenden mit der Tangente, der Hauptnormale oder der Binormale der Kehllinie in ihren Schnittpunkten mit derselben oder einer gegebenen Richtung einen konstanten Winkel einschließen.

Volk (Würzburg).

Krames, Josef: Die Regelflächen dritten Grades mit einem Drehkegel als Zentraltorse. S.-B. Akad. Wiss. Wien, math.-naturw. Kl., IIa 155, 83—96 (1947).

Die Regelflächen dritten Grades Φ , die den absoluten Kugelkreis doppelt oskulieren, sind vom Verf. in zahlreichen früheren Arbeiten ausführlich untersucht und beschrieben worden; ihre eigentliche Striktionslinie s ist i. a. von vierter Ordnung. Die vorliegende Abhandlung betrifft jene besonderen Flächen Φ_k , auf denen s ein kubischer Kreis ist. Verf. beweist u. a.: Die Zentraltorse von Φ_k ist ein Drehkegel Δ vom Öffnungswinkel $\pi/3$; nach Verebnung von Δ geht s in eine schiefe Kappakurve über; der Richtkegel von Φ_k (ein rationaler Kegel 3. Ordnung, 3. Klasse) ist ein Evolventenkegel von Δ und als solcher mit seinem Normalenkegel kongruent. Die durch Φ_k bestimmte synektische Kongruenz ist eine algebraische Kongruenz (2, 3), in der insgesamt ∞^2 Flächen Φ_k enthalten sind; je ∞^1 dieser Flächen sind untereinander kongruent usw.

H. Horninger (Istanbul).

Krames, Josef: Über Regelflächen, die mit gewissen aus ihnen abgeleiteten Flächen kongruent sind. S.-B. Akad. Wiss. Wien, mat.-naturw. Kl., IIa 155, 149—165 (1947).

Jede Regelfläche dritten Grades Φ_1 , deren eigentliche Striktionslinie k ein Kreis ist, besitzt einen Drehkegel vom Öffnungswinkel $\pi/3$ zur Zentraltorse Δ . Verf. hat derartige Flächen in früheren Arbeiten untersucht und u. a. nachgewiesen, daß sie mit allen von ihnen „abgeleiteten“ Flächen (d. h. sämtlichen Regelflächen, die k

zur Striktionslinie und Δ zur Zentraltorse besitzen) kongruent sind. — In der vorliegenden Arbeit wird zunächst nachgewiesen, daß letztere Eigenschaft für alle Regelflächen Φ_m gilt, deren Striktionslinie ein Kreis k ist und die einen Drehkegel Δ von beliebigem Öffnungswinkel zur Zentraltorse besitzen. Ferner ergibt sich die bemerkenswerte Tatsache, daß jede Fläche Φ_m (und daher auch die Fläche 3. Grades Φ_1) durch Abrollen einer Ebene ν auf dem Kegel Δ gewonnen werden kann. Hierbei zeigen sich Zusammenhänge mit einer vorhergehenden Arbeit des Verf. (vgl. vorsteh. Referat) sowie Verallgemeinerungen, die das Abrollen von ν auf beliebigen Torsen betreffen. Insbesondere erweist sich, daß die eingangs erwähnte Kongruenzeigenschaft aller voneinander ableitbarer Flächen außer den Flächen Φ_m nur noch den Regelflächen Φ_s zukommt, auf denen k eine Schraublinie und Δ eine Schraubtorse ist; die Flächen Φ_m können als Sonderfälle der Flächen Φ_s gelten. *Horninger.*

Bompiani, Enrico: Topologia differenziale. I. Enti topologici determinati da elementi differenziali di curve. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. 8, 3—8 (1950).

Bompiani, Enrico: Topologia differenziale. II. Invarianti topologici di elementi curvilinei. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. 8, 8—15 (1950).

Bompiani, Enrico: Topologia differenziale. III. Calotte superficiali del 2° ordine tangenti in un punto. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. 8, 81—86 (1950).

Bompiani, Enrico: Topologia differenziale. IV. Teoremi topologici e proiettivi sulle calotte superficiali. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. 8, 169—175 (1950).

In den Arbeiten dieser Reihe will Verf. topologische Invarianten von mehreren Kurven- oder Flächenelementen durch den gleichen Punkt aufstellen; das einfachste Beispiel wäre das Doppelverhältnis von vier Kurvenelementen erster Ordnung (E_1) auf einer zweidimensionalen Fläche. Natürlich beschränkt sich die „topologische“ Invarianz stets auf solche Abbildungen, die genügend oft differenzierbar sind. — I. k Kurvenelemente zweiter Ordnung (E_2) mit der gleichen Tangente bestimmen im allgemeinen (wenn sie „linear unabhängig“ sind, was auf die lineare Unabhängigkeit gewisser Vektoren hinauskommt) eindeutig eine k -Richtung, die Haupttrichtung dieser Elemente, die sämtliche Hyperflächenelemente zweiter Ordnung berühren, welche die k E_2 enthalten. Sämtlichen Hyperflächenelementen zweiter Ordnung, welche die k E_2 enthalten, ist ein lineares $(k-1)$ -dimensionales System von E_2 gemeinsam, das dadurch gekennzeichnet ist, daß die (2-dimensionale) Haupttrichtung von je zwei dieser E_2 in der Haupttrichtung unserer k E_2 liegt. Verf. nennt ein solches lineares System von E_p mit gemeinsamem E_q , $q < p$ einen Pinsel (pennello). Hier haben wir also einen k -Pinsel von E_2 . — II. Gegeben seien k linear unabhängige E_2 mit der gleichen Tangente und k E_1 in ihrer Haupttrichtung. Mittels geeigneter Determinantenbildungen läßt sich dann ein topologisch invariantes Differential angeben, in das die k E_2 und ebenso die k E_1 symmetrisch eingehen. Wir beschränken uns auf ein Beispiel; ist etwa $k=2$ und deformiert man so, daß die Elemente in einer Euklidischen Ebene liegen, sind dann R_1 und R_2 die Krümmungsradien der E_2 , α_1 und α_2 die Winkel, die die beiden E_1 mit der Tangente der E_2 bilden, ds das Bogenelement des E_2 , so ist $\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2} ds$ topologisch invariant. Dieselbe Invariante nimmt, wenn beide E_2 auf einer Fläche des Euklidischen R_3 liegen, $1/R$ die Normalkrümmung der Fläche in Richtung ihrer Tangente, ω_1 und ω_2 die Winkel der Schmiegenebenen beider E_2 mit der Tangentenebene der Fläche darstellen und α_1 , α_2 und ds wie oben erklärt sind, die Gestalt an $(\cotg \omega_1 - \cotg \omega_2) \frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2) ds}{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 R}$. Für k linear unabhängige

E_2 mit der gleichen Tangente und $k+s$ E_1 in ihrer Haupttrichtung lassen sich in entsprechender Weise sogar Invarianten, nicht nur ein invariantes Differential bilden. — III. Verf. betrachtet hier zwei verschiedene Flächenelemente 2ter Ordnung mit der gleichen Tangentenebene. Sämtliche Hyperflächenelemente 2ter Ordnung, die beide enthalten, berühren dann eine k -Richtung, wobei $k=3, 4$ oder 5 sein kann. Er nennt sie die Haupttrichtung des Paares. $k=3$ entspricht der Figur einer Fläche mit ihrer Tangentenebene im R_3 . Es gibt dann zwei topologisch invariante Richtungen in der Tangentenebene, denen die Schmieg tangente entsprechen, jede trägt einen 2-Pinsel von E_2 , die beiden Flächenelementen gemeinsam sind. — Für $k=4$ betrachten wir zwei E_2 beider Flächen mit gemeinsamer 1-Richtung α . Ihre Haupttrichtung liegt in einer 3-Richtung, die nur von der Richtung α abhängt. Sämtliche 3-Richtungen dieser Art bilden ein Büschel, zu jeder gehören zwei Richtungen α . Diese Paare bilden eine Involution im Tangenten-

büschel der beiden Flächenelemente. Es gibt also zwei topologisch verschiedene Fälle, da die Doppelemente dieser Involution verschieden sein können oder zusammenfallen. Dem entspricht die Tatsache, daß auf einer Fläche im R_4 entweder ein konjugiertes Netz oder eine Schar von Asymptotenlinien liegt. — Für $k = 5$ erhält man wie oben ein einparametrisches System von 3-Richtungen; diese hüllen hier einen quadratischen Kegel ein, der dem Kegel von del Pezzo für eine allgemeine Fläche des R_5 entspricht. Die genannten Bildungen haben also topologisch invarianten Charakter, sofern man die Tangentenebene mittransformiert. In jedem Fall bestimmen beide Flächenelemente ein Büschel solcher Elemente, so daß zu jedem Paar dieses Büschels die gleichen invarianten Figuren gehören. — IV. Hier betrachtet Verf. zwei Flächenelemente s -ter Ordnung, denen das gleiche Element ($s-1$ -ter Ordnung angehört. Wenn es dann E_s gibt, die beiden Elementen gleichzeitig angehören, so haben diese höchstens s verschiedene 1-Richtungen; zu jeder derartigen Richtung gehört ein s -dimensionaler Pinsel solcher E_s . Die Maximalzahl s solcher Pinsel ist dann und nur dann vorhanden, wenn es im Flächenpunkt reguläre dreidimensionale Mannigfaltigkeiten gibt, denen beide Flächenelemente angehören; diese haben dann sämtlich die gleiche 3-Richtung, die Haupttrichtung des Paares. — Die 3-dimensionalen Elemente r -ter Ordnung ($r \leq s$), denen beide Flächenelemente angehören, bilden ein lineares System der Dimension $(n-3) [\frac{1}{3} r(r+1)(r+2) - 1]$. Sind eines der beiden Flächenelemente und die 3-dimensionale Haupttrichtung gegeben, so ist das andere in einer linearen Gesamtheit der Dimension $\frac{1}{3} s(s+1) - 1$ beliebig wählbar. — Den Fall $s = 2$ behandelt Verf. dann weiter vom Standpunkt der projektiven Geometrie, es gibt Fallunterscheidungen nach der Dimension der linearen Räume, die beide Elemente einzeln und zusammen aufspannen.

Bol (Freiburg i. B.)

Mineo, Massimo: *Paragone metrico d'intorni superficiali*. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. 7, 84—87 (1949).

Diese Arbeit hat ihren Ursprung in einer kürzlich veröffentlichten Arbeit von V. Dalla Volta (dies. Zbl. 31, 412) in der dieser letztere, im Anschluß an eine Arbeit von E. Bompiani (dies. Zbl. 31, 269) über dasselbe Thema, eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür findet, daß 2 Flächenkalotten von einem euklidischen S_3 bis zu einer gewissen Ordnung in der Umgebung ihrer Mittelpunkte isometrisch abbildbar sind. Der Verf. behauptet nun bewiesen zu haben, daß die Bedingungen von Bompiani-Dalla Volta zwar notwendig, nicht aber hinreichend seien für die isometrische Abbildung der 2 Kalotten. Diese Behauptung ist jedoch nicht korrekt, da er seine Beweisführung auf der offenbar falschen Hypothese aufbaut, daß jede Punkt-Korrespondenz zwischen zwei Flächen $z = f(x, y)$, $z = f_1(x, y)$ sich analytisch darstellen läßt, indem man Punkte mit denselben x, y als korrespondierende Punkte annimmt.

Conforto (Rom).

Bompiani, E.: Über die Gaußsche Krümmung der Überbaumflächen. Math. Z., Berlin 53, 131—132 (1950).

Geometrische Deutung der Gaußschen Krümmung K einer zweidimensionalen Fläche im Euklidischen R_n ; projiziert man die Fläche senkrecht auf die R_3 , die von je drei Achsen des Koordinatensystems aufgespannt werden, und ist K_α die Gaußsche Krümmung einer solchen Projektion, γ_α das Verhältnis, in dem bei ihr das Oberflächenelement verkleinert wird, so gilt $K = \sum_\alpha \gamma_\alpha K_\alpha$. Berührt die Fläche eine Koordinatenebene, so haben an der Berührungsstelle sämtliche γ_α den Wert 0 oder 1, letzteres nur dann, wenn der R_3 , auf den projiziert wird, die Tangentenebene enthält. Die Summe hat dann nur $n-2$ wesentliche Glieder.

Bol.

Bol, Gerrit: Ein einfacher Beweis des Integralsatzes von Gauss-Bonnet. Arch. Mat., Karlsruhe 2, 199—201 (1950).

The author gives a neat and simple proof of the following theorem: Let e_i ($i = 1, 2, 3$) be three orthogonal unit vectors in the euclidean 3-space, which are periodic functions of a parameter t [$e_i(t+w) = e_i(t)$]. Let O be the area on the unit sphere bounded by the spherical representation of e_1 . Then the formula

$$\int_0^w e_3 de_2 + O = 2k\pi$$

holds, where k is an integer. — The theorem contains, as a particular case, the formula of Gauss-Bonnet of the theory of surfaces.

Santaló (Buenos Aires).

Lalan, V.: Les formes minima des surfaces d'Ossian Bonnet. Bull. Soc. math. France 77, 102—127 (1949).

Mit der Metrik ds^2 und der mittleren Krümmung H erscheint eine Fläche des dreidimensionalen euklidischen Raumes im wesentlichen bestimmt. Ein Ausnahmefall ist dann gegeben, wenn die Bestimmung der Hauptrichtungen an Stelle endlicher Operationen Integrationen erfordert und damit auf willkürliche Parameter führt. Diese Ausnahmefälle sind durch die O. Bonnetschen Flächen gegeben. In isotropen Parametern gewinnen die beiden Fundamentalformen einer solchen Bonnetschen Fläche S die Gestalt:

$$ds^2 = \frac{2\omega^1 \cdot \omega^2}{A}, \quad \Phi = (\omega^1)^2 + H ds^2 + (\omega^2)^2.$$

A bezeichnet die sogenannte Asphärizität der Fläche (gegeben durch die halbe Differenz der Hauptkrümmungen). Durch das Verschwinden der konjugiert-imaginären Pfaffschen Formen ω^1 und ω^2 werden die isotropen Kurven der Fläche festgelegt. Verf. nennt sie Minimalkurven der Fläche. Zu S lassen sich unendlich viele Flächen S bestimmen, isometrisch zu S mit gleichen Hauptkrümmungen in homologen Punkten, jedoch mit verschiedenen Hauptrichtungen in diesen. Dies bedingt zunächst die Relation $\omega^1 \omega^2 = \omega^1 \omega^2$. Stellt man jetzt Codazzis Bedingungen in der von Verf. gegebenen Form auf für S und S , so folgt $r\omega^1 + s\omega^2 = \bar{r}\bar{\omega}^1 + \bar{s}\bar{\omega}^2$ mit gewissen von Verf. näher bestimmten Invarianten r und s . Für Bonnetsche Flächen ist charakteristisch, daß die beiden hier erwähnten Bedingungen unendlich viele Lösungen in $\bar{\omega}^1$ und $\bar{\omega}^2$ gestatten. Die Bedingungen dafür lassen sich schließlich durch die Invarianten r und s ausdrücken und liefern: (*) $r_1 + rs = 0$, $s_2 + rs = 0$. $r = s = 0$ ist hinreichend für (*) und führt auf die sogenannte erste Klasse Bonnetscher Flächen; ihre mittlere Krümmung ist konstant. — Weiterhin spielt der Tensor

$$l_{\alpha\beta} = -H_{,\alpha\beta} - \frac{H_\alpha A_\beta + A_\alpha H_\beta}{A}$$

eine wichtige Rolle (, bedeutet kovariante Differentiation). Er führt auf folgende bereits von H. W. Alexander gegebene Charakterisierung Bonnetscher Flächen: $l_{\alpha\beta} = \lambda g_{\alpha\beta}$. Für λ ergibt sich:

$$\lambda = \frac{1}{H} \left(A^2 K + \frac{A_2 K}{4} + A_1 A \right) - \frac{A_1(H, A)}{A},$$

also ein Ausdruck, der sich allein aus der Metrik, der mittleren Krümmung und deren ersten Ableitungen aufbaut. Sodann zeigt Verf., daß die Bonnetschen Flächen Flächen isothermer Krümmung sind. Diese Eigenschaft ergibt sich aus dem Umstand, daß $\frac{A_2 H}{A_1 H} dH$ ein vollständiges Differential ist. Die Bestimmung isotroper Parameter u, v auf solchen Flächen führt auf die sogenannte „fonction primitive“ $\psi(u, v)$. Sie genügt auf Bonnetschen Flächen der Differentialgleichung $A_2 \psi / A_1 \psi = m$ ($-const.$) und diese Bedingung ist charakteristisch für Bonnetsche Flächen.

Insbesondere kann $m = 1$ erzielt werden durch besondere Wahl der isotropen Parameter. Eine Fläche mit isothermer mittlerer Krümmung ist im wesentlichen bekannt, wenn man ihre „Primitivfunktion“ $\psi(u, v)$ und ihre mittlere Krümmung $H = f(u + v)$ kennt. Über Gauß' theorema egregium gelangt nun Verf. zur Relation

$$D\psi_{uv} \left(\frac{f^2}{f'} + 2m \right) = 0 \quad \left(ds^2 = 2 \frac{\psi_{uv}}{f'} du dv, \quad D = \frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v} \right)$$

und damit zur zweiten und dritten Klasse Bonnetscher Flächen, je nachdem in dieser Gleichung der zweite oder der erste Faktor verschwindet. Die Flächen der zweiten Klasse sind imaginär, die der dritten Klasse sind gewisse W -Flächen. Hinsichtlich ihrer ausführlichen Untersuchung muß auf die Originalarbeit verwiesen werden. Von Interesse sind noch gewisse Beziehungen zu einem Satz von E. Cartan über die Möglichkeit konformer Abbildungen der O. Bonnetschen Flächen, bei welchen Krümmungslinien und virtuelle Krümmungslinien in Kreise bzw. Gerade übergehen.

M. Pinl (Dacca).

Segre, Beniamino: Generalizzazione di un teorema di Beltrami. Boll. Un. mat. Ital., III. S. 4, 16—22 (1949).

Verf. geht aus von der Differentialgleichung für die Geodätischen

$$(1) \quad y'' = a y'^3 + b y'^2 + c y' + d,$$

wo a, b, c, d Funktionen von x, y sind, und stellt für die Koeffizienten a, b, c, d die Bedingungen auf, daß die Integralkurven von (1) Kreise sind:

$$(2) \quad c = a, \quad d = b, \quad a_y - a b = 0, \quad a_x + b_y + a^2 - b^2 = 0, \quad b_x + a b = 0.$$

Ist nun $ds^2 = E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2$ das Quadrat des Bogenelementes einer

Fläche mit dem Krümmungsmaß K , so ist

$$a = \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad b = \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix}, \quad c = \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} - 2 \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}, \quad d = - \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix},$$

und die Beziehungen (2) führen auf die Gleichungen $E K_y - F K_x = 0$, $F K_y - G K_x = 0$, also auf $K_x = K_y = 0$, $K = \text{const.}$, womit der Satz von Beltrami-Busse bewiesen ist, daß die Flächen konstanten Krümmungsmaßes die einzigen Flächen sind, die eine Abbildung auf die euklidische Ebene gestatten, so daß den Geodätischen der Fläche Kreise in der Ebene entsprechen. Daraus folgert Verf., daß diese Abbildung von 11 Parametern abhängt. Einen anderen, äußerst einfachen Beweis für obigen Satz erhält Verf. aus dem folgenden interessanten Satz: Wenn eine Punktkorrespondenz zwischen zwei euklidischen Ebenen besteht, die die Umgebung eines Punktes O der einen Ebene eindeutig umkehrbar in die Umgebung des Punktes O' der anderen Ebene und die Geraden durch O in Kurven durch O' überführt, die Krümmungskreise in O' haben, so gehören diese Kreise ein und demselben Kreishüschel an. Die Anwendung eines Satzes von Beltrami (*Opere matematiche I*, Milano, 1902, S. 202—280) führt fast unmittelbar auf die Behauptung. Volk.

Jackson, S. B.: Geodesic vertices on surfaces of constant curvature. Amer. J. Math. 72, 161—186 (1950).

In Bull. Amer. math. Soc. 50, 564—578 (1944) hat Verf. die ebenen geschlossenen Kurven mit genau zwei Scheiteln untersucht. Die Ergebnisse werden hier verallgemeinert auf Kurven mit genau zwei geodätischen Scheiteln auf Flächen konstanter Gaußscher Krümmung. Jede Fläche dieser Art läßt sich eindeutig kreisverwandt auf die Ebene abbilden, die Abbildung ist aber auch für einfach zusammenhängende Flächenstücke konstanter Krümmung nicht immer eineindeutig. Das einfachste Beispiel ist der über einem Kreisring um den Nullpunkt gelegene Teil der Riemannschen Fläche für $w = \log z$; dieses Flächenstück läßt sich leicht auf ein singularitätenfreies (etwa schraubenförmiges) Flächenstück des R_3 abwickeln. Hierher rühren die wichtigsten Unterschiede zum ebenen Fall. Betrachtet man jede Kurve konstanter geodätischer Krümmung als Kreis, so können zwei Kreise beliebig viele Schnittpunkte haben. — Verf. führt daher „vollständige geodätische Kreise“ ein, das sind solche, die einfach geschlossen sind; jeder solche vollständige Kreis läßt sich mit dem Innern eineindeutig kreisverwandt in die Ebene abbilden. Das gleiche gilt für das von zwei im entgegengesetzten Sinne monoton gekrümmten Bogen AB und BA umschlossene Gebiet. Genau zwei der Gebiete, in die eine geschlossene Kurve C mit genau zwei Scheiteln auf einem einfach zusammenhängenden Flächenstück konstanter Krümmung dieses teilt, werden nur von einer Schleife von C begrenzt, in der Ebene aber keines der anderen von lauter gleichgerichteten Bogen von C . Auf unseren Flächen ist dies aber möglich, wenn das Flächenstück von genau zwei Bogen von C begrenzt wird, wie durch ein Beispiel gezeigt wird. Einer Modifikation bedürfen auch die Sätze über die Scheitelzahl einfach geschlossener Kurven, die von einem Kreise in $2n$ Punkten getroffen werden: man muß hier verlangen, daß der Kreis vollständig ist, sonst gibt es Beispiele mit nur zwei Scheiteln. Der Vierscheitelsatz läßt sich übertragen. Bol.

Marussi, Antonio: Sviluppi di Legendre generalizzati per una curva qualunque tracciata su di una superficie pure qualunque. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. 8, 342—347 (1950).

Durch eine feste Richtung ω im Raume sind auf einer konvexen Fläche die geographischen Koordinaten $\varphi = y^1$ und $\lambda = y^2$ definiert. $(d\mathfrak{R}^2) = g_{ij} dy^i dy^j$. — $(d\mathfrak{R} d\mathfrak{H}) = Dd\varphi^2 + 2D'd\varphi d\lambda + D''d\lambda^2$. Die Tensorkomponenten g_{ij} werden durch D , D' und D'' ausgedrückt. Der Tangentenvektor im Normalschnitt durch ω , der mit ω einen spitzen Winkel bildet, wird mit i_1 und der Tangentenvektor senkrecht

auf i_1 mit i_2 bezeichnet;

$$v_1 = \frac{\partial \Re}{\partial \varphi} = -D i_1 - \frac{D'}{\cos \varphi} i_2, \quad v_2 = \frac{\partial \Re}{\partial \lambda} = -D' i_1 - \frac{D''}{\cos \varphi} i_2.$$

Für die reziproken Vektoren gelten

$$\Delta v^1 = -D'' i_1 + D' \cos \varphi i_2, \quad \Delta v^2 = D' i_1 - D \cos \varphi i_2, \quad \Delta = D D' - D'^2.$$

Die Mainardi-Codazzischen Gleichungen werden angeschrieben. Die Christoffelschen Symbole 2. Art $\Gamma_{jk}^i = (\partial^2 \Re / \partial y^j \partial y^k v^i)$ werden berechnet. Bei einer Flächenkurve wird der Tangentenvektor mit \mathfrak{T} und der Einheitsvektor in der Tangentenebene senkrecht zu \mathfrak{T} mit \mathfrak{B} bezeichnet. In den verallgemeinerten Frenetschen Formeln $\frac{d\mathfrak{T}}{ds} = \frac{\mathfrak{B}}{\varrho_t} - \frac{\mathfrak{N}}{\varrho_n}$, $\frac{d\mathfrak{B}}{ds} = -\frac{\mathfrak{T}}{\varrho_t} - \frac{\mathfrak{N}}{\tau_g}$ bedeuten $1/\varrho_t = \gamma$ die tangentielle Krümmung, $1/\varrho_n$ die normale Krümmung und $1/\tau_g$ die geodätische Torsion. Die kontravarianten Komponenten der Vektoren \mathfrak{T} und \mathfrak{B} werden mit λ^i und ν^i bezeichnet.

$$\lambda^i = \frac{dy^i}{ds}, \quad \frac{d\lambda^i}{ds} = \gamma \nu^i - \Gamma_{jh}^i \lambda^j \lambda^h, \quad \frac{d\nu^i}{ds} = -\gamma \lambda^i - \Gamma_{jh}^i \nu^j \lambda^h,$$

Damit wird die Legendresche Potenzreihe für die kürzeste Kurve auf dem Drehellipsoid verallgemeinert, wobei γ als Funktion der Bogenlänge gegeben sei.

$$y^i = y_0^i + \lambda_0^i s + \left\{ \frac{d\lambda^i}{ds} \right\}_0 \frac{s^2}{2} + \dots, \\ \frac{d^2 \lambda^i}{ds^2} = \frac{d\gamma}{ds} \nu^i - \gamma^2 \lambda^i - 3\gamma \Gamma_{jh}^i \nu^j \lambda^h + \left\{ 2\Gamma_{hr}^i \Gamma_{jk}^r - \frac{\partial \Gamma_{jh}^i}{\partial y^k} \right\} \lambda^h \lambda^j \lambda^k.$$

Das Ausgangsazimut wird mit α_0 bezeichnet.

$$t_0 = i_1 \cos \alpha_0 + i_2 \sin \alpha_0, \quad b_0 = -i_1 \sin \alpha_0 + i_2 \cos \alpha_0, \\ A_0 \lambda_0^1 = -D_0' \cos \alpha_0 + D_0' \cos \varphi_0 \sin \alpha_0 \quad \text{usw.}$$

Das Azimut wird nach den Gleichungen

$$\cos \alpha = (\mathfrak{T} i_1) = (\lambda^k v_k i_1) = -D \lambda^1 - D' \lambda^2, \quad \sin \alpha = (\mathfrak{T} i_2) = -\frac{D' \lambda^1 + D'' \lambda^2}{\cos \varphi}$$

übertragen, worin $\lambda^k = \lambda_0^k + \left\{ \frac{d\lambda^k}{ds} \right\}_0 s + \dots$. Konrad Ludwig (Hannover).

Lemoine, Simone: Sur l'emploi d'un repère canonique dans l'étude des surfaces isométriques d'une surface donnée avec correspondance d'un réseau conjugué. C. r. Acad. Sci., Paris 230, 1571—1573 (1950).

Formation de l'équation qui permet de calculer le tenseur asymptotique d'une surface dont on connaît le ds^2 et un réseau conjugué. En adoptant un repère convenable et en supposant la courbure totale positive, l'A. interprète géométriquement la nature de certains coefficients de l'équation. Considération du cas où la surface est déformable avec persistance du réseau conjugué. Th. Lepage (Bruxelles).

Differentialgeometrie besonderer Liescher Gruppen:

Löbell, Frank: Betrachtungen über Flächenabbildungen. I. Das Vektorpolynom $\lambda^2 j_1 - \lambda j + j_2$. S.-B. math.-naturw. Abt. Bayer. Akad. Wiss. München 1945/46. 175—183 (1947).

I. Zwei reguläre Flächenstücke werden durch gemeinsame Parameter u, v aufeinander abgebildet und die Tangentialebenen $\varepsilon, \varepsilon'$ in entsprechenden Punkten mit den Ortsvektoren \mathfrak{r}, η affin durch die Zuordnung $\lambda d\mathfrak{r} \rightarrow d\eta$ aufeinander bezogen ($\lambda \neq 0$, reell). Unter der Voraussetzung, daß die Berührungspunkte durch Parallelverschiebung der Tangentialebenen mit dem Berührungspunkt O zusammenfallen, wird die Mannigfaltigkeit der Verbindungsvektoren zusammengehörigen Punkte dieser Ebenen untersucht. Insbesondere verschwindet das Vektorpolynom $l(\lambda) = \lambda^2 j_1 - \lambda j + j_2$ mit den relativen Vektorinvarianten $j_1 = \mathfrak{r}_u \times \mathfrak{r}_v, j_2 = \eta_u \times \eta_v, j = \mathfrak{r}_u \times \eta_v - \mathfrak{r}_v \times \eta_u$ (vgl. Löbell, Differentialinvarianten bei Flächenabbil-

dungen, S.-B. math.-naturw. Abt. Bayer. Akad. Wiss. München 1943), wenn die affine Transformation in eine Parallelprojektion übergeht. Es wird die Schar der Vektoren $l(\lambda)$ diskutiert und insbesondere der Zusammenhang zwischen den Nullstellen des Polynoms $l(\lambda)$ und den Fixrichtungen der affinen Abbildung $\varepsilon \rightarrow \varepsilon'$ aufgezeigt. Weise (Kiel).

Alda, Václav: Sur les propriétés affines des correspondances analytiques. Časopis Mat. Fys., Praha 75, 51—66 und tschechische Zusammenfassg. 66—67 (1950).

I. \mathfrak{C} sei eine analytische, umkehrbar eindeutige Abbildung des n -dimensionalen affinen Punktraumes $(A)_n$ auf den $(B)_n$. In jedem Punkt A ist eine „ \mathfrak{C} berührende Affinität“ T mit den Eigenschaften $T A = B$, $T dA = dB$ bestimmt. Die Bestimmung von T wird bei geeigneten beweglichen n -Beinen in A und B durchgeführt. Für jede durch A gehende Kurve K haben $\mathfrak{C} K$ und $T K$ in $B = T A$ eine Berührung 1. Ordnung. Ist $K^* = T^{-1} \mathfrak{C} K$, $A^* = T^{-1} \mathfrak{C} A$ und E eine Hyperbene durch A , die den Vektor $v = d^2 A^* - d^2 A$ nicht enthält, so berühren einander die Projektionen von K und K^* in Richtung v auf E von 2. Ordnung. Charakteristisch heißt eine Richtung dA , wenn sie von der des zugeordneten Vektors v linear abhängt. Dann entspricht jeder Kurve charakteristischer Tangentenrichtung in A , die dort eine Wendetangente hat, bei \mathfrak{C} eine Kurve mit Wendetangente in B . — II. Für $n = 2$ werden die charakteristischen Richtungen aus einer kubischen Gleichung erhalten. Der Fall inhaltstreuer Abbildung \mathfrak{C} wird dabei ausführlich durchgeführt und in mehrere Unterfälle aufgespalten. Hat die kubische Gleichung z. B. eine dreifache Wurzel, so sind die charakteristischen Kurven in (A) und (B) Geraden und \mathfrak{C} ist auf diesen Geraden jeweils eine Affinität. — III. Die Affinität T für eine feste Abbildung \mathfrak{C} ist durch den Punkt A bestimmt. Für $n = 2$ und $n = 3$ werden die Abbildungen \mathfrak{C} bestimmt, für die die tangierende Affinität T von weniger als n Parametern abhängt. Ist C für $n = 2$ die Kurve durch A mit fester Affinität T , so ist C eine Gerade, der in (B) auch eine Gerade C' entspricht. \mathfrak{C} ist für die Geraden C, C' allein dann eine Affinität A_C , die mit der C zugehörigen Affinität T zusammenfällt. Hängt für $n = 3$ T nur von einem Parameter ab, so geht durch jeden Punkt A eine Fläche S mit fester Affinität T . Die Flächen S sind Ebenen, denen in (B) Ebenen S' entsprechen. \mathfrak{C} ist für die Ebenen S, S' eine Affinität, nämlich die Affinität T , auf S betrachtet. Hängt aber T für $n = 3$ von 2 Parametern ab, so bilden die Kurven mit fester Affinität T in (A) eine Geradenkongruenz, der in (B) eine Geradenkongruenz entspricht. \mathfrak{C} ist für entsprechende Geraden die diesen zugeordnete Affinität T , allein auf ihnen betrachtet.

Süss (Freiburg i. Br.).

Inzinger, Rudolf: Über eine projektive Invariante eines Paares von Flächenelementen zweiter Ordnung. Österreich. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl., S.-B., IIa 157, 263—274 (1949).

Siano F_2 e F'_2 due elementi superficiali del 2° ordine tangenti nei centri P, P' rispettivamente ai piani π, π' : l'A. considera il caso particolare in cui $\pi = \pi'$, $P \neq P'$ e il suo duale $P = P'$, $\pi \neq \pi'$ e determina in tali circostanze l'unico invariante proiettivo J delle due calotte valendosi di considerazioni più semplici e complete di quelle già svolte da C. C. Hsiung su detto argomento [Duke math. J. 10, 717—720 (1943); 12, 441—443 (1945)]. Riferendosi al caso $\pi = \pi'$, $P \neq P'$ l'A. fa intervenire la retta $t = PP'$ e su di essa il punto di regresso T comune a tutte le sviluppabili circoscritte alle coppie di superficie contenenti le due calotte. Considera poi ancora sulla retta t i vertici D, D^* del triangolo diagonale del quadrilatero formato dalle due coppie di tangenti principali in P e P' . La configurazione \mathfrak{F} costituita da detto quadrilatero con relativo triangolo diagonale insieme coi punti P, P', T non determina completamente la coppia di calotte F_2, F'_2 essendo comune a tutta una schiera di coppie siffatte, mutata in sé dalle collineazioni che lasciano fissi i punti di π . Ne segue tuttavia che la coppia F_2, F'_2 non possiede invarianti proiettivi all'infuori di quelli della configurazione \mathfrak{F} i quali si riducono al

birapporto $[T, D, P, P']$ e al suo opposto $[T, D^*, P, P']$ che sono entrambi reali o immaginari puri. Si può pertanto assumere $J = [T, D, P, P']^2 = [T, D^*, P, P']^2$. I due birapporti considerati sono pure rispettivamente gli invarianti assoluti di due schiere di omologie (di centro T) che mutano F_2 in F'_2 . Traducendo per dualità si ottiene l'invariante nel caso $P = P'$, $\pi \neq \pi'$. A detti risultati l'A. perviene con due trattazioni diverse: sintetica e analitica: inoltre valendosi delle indicatrici di Dupin egli fornisce per J il significato metrico $J = K R^4 / K' R'^4$ dove K e K' sono le curvatures totali delle due calotte, mentre R e R' sono i raggi di curvatura delle sezioni normali, perpendicolari a t , delle sviluppabili circoscritte alle due calotte e aventi t per generatrice. Un passaggio al limite consente di collegare questa espressione di J a quella dell'invariante di Mehmke relativo a una coppia di elementi superficiali generici del 2° ordine. P. Buzano (Torino).

Grove, V. G.: On the R_2 -associate of a line. Proc. Amer. math. Soc. 1, 20—22 (1950).

Zu jeder Kurvenrichtung $\lambda = dv/du$ auf einer Fläche $x(u, v)$ des projektiven R_3 (u, v Asymptotenlinienparameter) gehört nach P. O. Bell [Trans. Amer. math. Soc. 46, 389—409 (1939); dies. Zbl. 22, 167] eine projektive Abbildung der Tangentenebene in sich, bei der die Geraden durch den Flächenpunkt x_0 festbleiben; sie bildet jede Normale zweiter Art (Gerade in der Tangentenebene, die den Flächenpunkt nicht enthält) auf ihre R_2 -assoziierte ab. Verf. gibt eine neue geometrische Erklärung dieser Abbildung: Ist l_2 eine Normale zweiter Art, l_1 ihre Polare in bezug auf die Darboux-Quadriken, so projiziere man die Schmiegtangenten in einem Nachbarpunkt der konjugierten Kurvenrichtung aus einem Punkte von l_1 auf die Tangentenebene in x_0 ; die Schnittpunkte der Projektionen mit den Schmiegtangenten in x_0 streben dann Grenzlagen zu, die auf der zu l_2 assoziierten Normalen liegen. — Die Assoziierten von einer Geraden l_2 in bezug auf sämtliche Richtungen hüllen einen Kegelschnitt ein; der Berührungspunkt liegt auf der Geraden durch x_0 in der Richtung $(\beta/\gamma)\lambda^{-2}$. Das Doppelverhältnis dieser Richtung mit λ und den Schmiegtangenten ist längs einer Kurve dann und nur dann konstant, wenn sie mit den Darboux-Richtungen überall das gleiche Doppelverhältnis bildet. Der Ort der Schnittpunkte jeder Tangente durch x_0 mit der zu l_2 in bezug auf ihre Richtung assoziierten Geraden ist eine rationale C_3 , deren Wendepunkte auf l_2 und den Darboux-tangenten liegen und von der x_0 Doppelpunkt und die Schmiegtangenten dort die Tangenten sind. Bol (Freiburg i. B.).

Terracini, Alessandro: Su certe quaterne di direttrici di una rigata. Ann. Mat. pura appl., Bologna, IV. S. 30, 267—275 (1949).

Sopra una rigata R non sviluppabile si considerino due coppie di curve direttrici C_y, C_a e C_z, C_b descritte rispettivamente dai punti y, a, z, b tutti distinti e appartenenti a una stessa generatrice (variabile) h . L'A. chiama associate le due coppie di direttrici quando i due fasci di centri y e z e appartenenti rispettivamente ai piani tangenti in a e b , insieme coi fasci analoghi relativi alla generatrice infinitamente vicina, appartengono ad un complesso lineare: perchè ciò si verifichi è necessario e sufficiente che le tangenti t_y e t_z a C_y e C_z nei punti y e z e le coniugate t'_a, t'_b alle tangenti di C_a, C_b nei punti a, b appartengano ad una schiera. Ne segue che se due coppie sono associate esse restano tali scambiando entro ciascuna le due direttrici. Se si rappresentano le rette dello spazio coi punti della quadrica di Klein dello S_5 , ai fasci suddetti di centri y e z corrispondono due rette appartenenti a un piano π dipendente dallo stesso parametro t che determina la posizione della generatrice h su R : al variare di t si ha un sistema ∞^1 di piani (tangenti alla quadrica di Klein) e l'ipotesi che le due coppie di direttrici considerate siano associate si traduce nella proprietà per due piani consecutivi del sistema di esser sempre incidenti in un punto. Detta incidenza può però verificarsi secondo diversi ordini σ di approssi-

mazione, conformemente a quanto stabilito dal Terracini in altro lavoro (Scritti mat. offerti a L. Berzolari, Pavia 1936; questo Zbl. 16, 75): egli approfondisce qui il caso $\sigma \geq 4$ nell'ipotesi più particolare che le direttrici C_y, C_z siano asintotiche di R , caratterizzando geometricamente le varie alternative a cui da luogo.

P. Buzano (Torino).

Kasner, Edward and Irene Harrison: *Voltaire on mathematics and horn angles*. Scripta math., New York 16, 13—21 (1950).

Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Übertragungen:

Busemann, Herbert: *The geometry of Finsler spaces*. Bull. Amer. math. Soc. 56, 5—16 (1950).

Les espaces de Finsler furent envisagés pour la première fois par Riemann dans sa conférence inaugurale „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen“. Les premiers résultats les concernant furent obtenus en relation avec la théorie de Weierstrass en Calcul des Variations, par Bliss, Underhill, Landsberg. Leur étude systématique fut commencée par Finsler et poursuivie au moyen des méthodes du Calcul Tensoriel par Berwald, Funk, Winternitz. Ce dernier développement basé sur la considération d'éléments de contact pourvus de la métrique riemannienne osculatrice culmine dans l'ouvrage classique de E. Cartan (Les espaces de Finsler, Exposés de géométrie, Vol. II, Paris 1934; ce Zbl. 8, 418). Le présent article donne une vue d'ensemble des résultats obtenus et des courants de recherche dans l'étude géométrique directe des espaces de Finsler, tendance dont l'A. et G. Choquet sont actuellement les principaux représentants. Un bel exemple de réussite dans ce sens est l'étude des espaces à courbure non négative [H. Busemann, Acta math., Uppsala 80, 259—310 (1948)]. Un espace de Finsler \mathcal{F}_n est appelé par Menger „espace généralisé de Minkowski“; c'est une variété n -dimensionnelle localement (au sens différentiel) minkowskienne. L'indicatrice (sphère unitaire, gauge) \mathcal{I} , est supposée symétrique. L'étude directe des \mathcal{F}_n doit être précédée de l'étude des espaces de Minkowski \mathcal{M}_n . La mesure affine n -dimensionnelle $m_n(M)$ d'un ensemble borélien M de \mathcal{M}_n est définie à une constante λ près: il en est de même de la mesure p -dimensionnelle m_p dans une variété linéaire L_p à p dimensions. Le choix de λ pour $p = 1$ est fixé par la gauge \mathcal{I} . Dans le cas général, la normalisation naturelle due à Choquet est telle que $m_p(\mathcal{I}, L_p)$ ait la valeur correspondante au cas euclidien. L'A. a montré que m_p n'est autre que la mesure de Hausdorff à p dimensions dans \mathcal{M}_n . La définition de m_p dans un \mathcal{F}_n a lieu par le procédé usuel d'intégration. $V(p, q)$ désigne dans \mathcal{M}_n la sphère lieu des points x tels que la distance $px = q$, $W(p, q)$ le lieu des points x tels que $px \leq q$. Comme dans le cas euclidien, $W(p, q)$ maximise le volume parmi les ensembles de diamètre $2q$. Une droite $L = L_1$ de \mathcal{M}_n est dite normale à l'hyperplan \mathcal{H} si la condition de transversalité habituelle est vérifiée. L'hyperplan \mathcal{H} est dit normal à L si, pour tout cylindre parallèle à L la direction de \mathcal{H} correspond à une section de mesure m_{n-1} maximale. Les enveloppes de plans normaux aux rayons issus d'un point fixe p constituent les solutions du problème isopérimétrique. Elles sont désignées par $T(p, q)$, étant entendu que pour $T(p, 1)$ l'aire minkowskienne = n fois le „volume“. La formule de Minkowski pour l'aire d'une surface convexe fermée S limitant un ensemble K à partir d'une q -dilatation est valide si les $T(n, q)$ sont utilisées comme sphères. S peut être non convexe, pourvu qu'elle soit suffisamment lisse. Une autre expression est donnée, faisant intervenir le volume mixte de K compté $n - 1$ fois et de $T = T(o, 1)$ (o = origine). En mettant dans le cas $n = 3$ en correspondance le point x de S et le point x' de T où les plans tangents orientés sont parallèles on peut définir à partir de la formule d'Olinde Rodrigues les rayons de courbure principaux R_1 et R_2 . D'après un résultat de Duschek, les surfaces minima de \mathcal{M}_3 sont alors caractérisées par $1/R_1 + 1/R_2 = 0$. L'article termine par l'annonce d'une publication où sera étudié le problème de la caractérisation par courbures d'un arc de \mathcal{M} à une congruence on à une translation près. Deux légères inexactitudes sont à signaler: p. 7, ligne 8. Finsler définit la courbure d'une courbe C en un point x comme la limite de l'expression: $(24(s - \sigma)/s^3)^{1/2}$ où s désigne la longueur d'un arc de C au voisinage de x et σ la longueur de la corde (géodésique) correspondante. Il s'agit d'une définition intrinsèque. Un champ de courbes est ensuite introduit pour obtenir une expression analytique. p. 11, Note 8. Choquet, dans la note mentionnée, ne donne qu'une seule définition (les 2 autres sont dues à Bouligand). Le caractère intrinsèque n'est pas mentionné, étant regardé comme évident. La nouvelle notion est utilisée pour définir les notions essentielles de l'Analyse Vectorielle. L'espace minkowskien considéré par l'A. n'est pas complètement dégagé d'un substratum euclidien (cf. p. 9); il semble que la normale considérée p. 13 ligne 22, soit la normale euclidienne. Bien que le terme („espace de Banach“) apparaisse, les notions de l'espace dual et de sa sphère unitaire (figuratrice) ainsi que de correspondance canonique entre indicatrice et figuratrice (montée et descente d'indices en Calcul Tensoriel) ne sont pas mentionnées. Dans le même ordre d'idées, il n'est pas fait mention des travaux consacrés à la géométrie des espaces de Banach [cf.: R. C. James, Trans. Amer. math. Soc. 61, 265—292 (1947)].

La remarque p. 13, lignes 18–19, que les hyperplans de \mathcal{M}_n sont des surfaces minimales est, sous des conditions plus restrictives, utilisée par A. Haar [Math. Ann. 97, 124–158 (1917)] dans l'étude du problème de Cauchy pour une intégrale $\iint F(p, q) dx dy$ dans l'espace euclidien à trois dimensions. L'opinion si bien illustrée que la théorie des corps convexes est l'un des outils essentiels dans l'étude des espaces de Finsler peut être complétée par l'affirmation que tout théorème dans ces espaces admet une traduction dans le langage de la théorie de la convexité (cf.: Propriété pour un plan minkowskien d'avoir une courbure nulle selon Cartan). Enfin le Référént signale la thèse de H. Rund (Cape-Town, 1950) où l'étude des espaces de Minkowski (trigonométrie, théorème de Meusnier, ...) sert d'introduction à l'étude des espaces de Finsler; un outil essentiel dans le cas d'une \mathfrak{F}_2 est la comparaison entre un petit cercle (ou disque) géodésique de centre p et le cercle (ou disque) correspondant dans l'espace tangent en p . Chr. Pauc.

Varga, O.: Über den Zusammenhang der Krümmungsaffinoren in zwei eindeutig aufeinander abgebildeten Finslerschen Räumen. Acta sci. math., Szeged 12 A, L. Fejér et F. Riesz LXX annos natis dedic., 132–135 (1950).

Zwei eineindeutig aufeinander abgebildete Finslersche Räume sind äquivalent mit einer Mannigfaltigkeit mit zwei verschiedenen Finslerschen Maßbestimmungen. Die Relationen zwischen den verschiedenen Krümmungsaffinoren werden angegeben. Diese Relationen enthalten die Affinoren, die bei der Bildung der Differenz der zwei Übertragungen auftreten. J. Haantjes (Leiden).

Slebodziński, W.: Géométrie textile et connexions affines. Colloq. math. 1, 245–246 (1948).

Zu einem ebenen 3-Gewebe gehört bekanntlich eine Weylsche Geometrie (vgl. W. Blaschke u. G. Bol, Geometrie der Gewebe, Berlin 1938, § 17; dies. Zbl. 20, 67). Entsprechendes gilt in R_n für Gewebe aus n oder $n + 1$ Hyperflächenscharen oder Kurvenscharen. Verf. gibt unter Benutzung alternierender Formen die Strukturformeln dieser Übertragungen an und betont, daß man viele Fragen der Gewebegeometrie so auf Probleme über Übertragungen zurückführen kann. Bol.

Bompiani, Enrico: Interpretazione proiettiva degli spazi a connessione affine. Ann. Mat. pura appl., Bologna, IV. S. 28, 69–87 (1949).

The author proves that the n -dimensional spaces with an affine connection can be interpreted as varieties V_n in a projective space S_N [$N \geq n(n+3)/2$]. The paths, the affine arc length and the parallel displacements are interpreted as projective relations between V_n and certain algebraic varieties united to every point of V_n . — Let V_n be a generic n -dimensional variety in S_N represented by $y = y(x^i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Let $S(2)$ be the linear space determined by the points y . $y_i = \partial_i y$, $y_{hk} = \partial_{hk}^2 y$. A generic point in $S(2)$ will be $v^0 y + v^i y_i + v^{hk} y_{hk}$ with v^0, v^i, v^{hk} as homogeneous coordinates in $S(2)$. Given a system of differential equations of the form

$$(*) \quad d^2 x^i + \Gamma_{hk}^i dx^h dx^k - \varphi dx^i = 0$$

the integral curve contained in V_n which passes through the point y and is tangent to the direction dx^i has its osculating plane determined by the points $y, y_i dx^i, y_{hk} dx^h dx^k - y_i \Gamma_{hk}^i dx^h dx^k$ that is, it is the plane which contains the point y and the straight line determined by the points $A(v^0 = 0, v^i = dx^i, v^{hk} = 0)$ and $B(v^0 = 0, v^i = -\Gamma_{hk}^i dx^h dx^k, v^{hk} = dx^h dx^k)$. When dx^i varies through the point y , the point A describes a S_{n-1} , the point B a variety of Veronese V_{n-1}^{2n-1} and the straight line AB generates a variety W_n which it is shown to contain ∞^n other varieties of Veronese V_{n-1}^{2n-1} . That is, to each system (*) corresponds a variety W_n which is intersected by $\infty^n S_{p-1}$ [$p = n(n+1)/2$] contained in $S(2)$ in varieties V_{n-1}^{2n-1} . The linear spaces S_p obtained by projection of S_{p-1} from the point y , are intersected by the osculating planes of the paths [integral curves of (*)] in straight lines, called the affine normals of the paths. To each symmetric connection Γ_{hk}^i corresponds a S_n and the parameter s such that the affine normal becomes determined by the points $y, d^2 y/ds^2$ is the affine arc length. An analogous interpretation for the parallel displacement is also given.

Santaló (Buenos Aires).

Hlavatý, V.: Projective geometrization of a system of partial differential equations. I: Normal points. II: Frenet formulae for normal points. III: Projective normal spaces. IV: Frenet formulae for projective normal spaces and their integrability conditions. Proc. Acad. Wet., Amsterdam 53, 318—326, 487—493, 835—847, 848—856 (1950); Indag. math., Amsterdam 12, 66—74, 139—145, 279—291, 292—300 (1950).

The au. considers an X_m in a projective linear space P_n introducing in both spaces homogeneous coordinates $(y^a, x^h; a = 0, 1, \dots, m; h = 0, 1, \dots, n)$. It is supposed that the X_m is a solution of a system of partial differential equations

$$x_{a_{N+1} \dots a_1}^h = \sum_{r=1}^N \Phi_{a_{N+1} \dots a_r \dots a_1}^{b_r \dots b_1} x_{b_r \dots b_1}^h \quad \text{where} \quad x_{b_r \dots b_1}^h = \frac{\partial^r x^h}{\partial y^{b_r} \dots \partial y^{b_1}}.$$

Form these coefficients Φ , which are supposed to be uniquely given, a connection is derived together with a set of normal points $n_{ab}^h, n_{abc}^h, \dots, n_{a_N \dots a_1}^h$. In II a system of Frenet formulae for these normal points is given. In this system enter two sets of projective tensors. It is pointed out that the normal points are not suitable to define projective normal spaces if these spaces should interest only in the point to which these spaces belong. Such projective normal spaces are defined in III but only for special X_m in P_n , which the au. called symmetric X_m . In IV a system of Frenet formulae is given for these projective normal spaces together with its conditions of integrability.

J. Haantjes (Leiden).

Nalli, Pia: Trasporti rigidi di vettori negli spazi quadridimensionali. Ann. Mat. pura appl., Bologna, IV. S. 28, 291—297 (1949).

Verf. behandelt den schiefsymmetrischen Tensor $A_{ij} = v_i \dot{v}_j - v_j \dot{v}_i (i, j = 1, 2, 3, 4)$, längs der Kurve L gegeben durch $x_h = x_h(t)$, $h = 1, 2, 3, 4$. Für die Komponenten v_i wird längs L das Parallelverschiebungsgesetz von Levi-Civita vorausgesetzt. Dieses Übertragungsgesetz bewirkt nun für die Tensorkomponenten A_{ij} die folgenden drei notwendigen Bedingungen (bzw. für die ihnen zugehörenden Pfaffschen Formen \dot{A}_{ij} und \dot{A}_{ij}''):

$$(1) \quad \sum_{i,j,h,k=1}^4 \varepsilon^{ijhk} A_{ij} A_{hk} = 0; \quad (2) \quad \sum_{i,j,h,k=1}^4 \varepsilon^{ijhk} \dot{A}_{ij} \dot{A}_{hk} = 0;$$

$$(3) \quad \sum_{i,j,h,k=1}^4 \varepsilon^{ijhk} A_{ij} \dot{A}_{hk}'' = 0,$$

ε^{ijhk} bedeutet Null, wenn i, j, h, k nicht alle verschieden sind, $1/\sqrt{g}$ wenn i, j, h, k eine gerade Permutation ist und $-1/\sqrt{g}$ wenn i, j, h, k eine ungerade Permutation ist, g ist die Diskriminante der vierdimensionalen Metrik.

M. Pinl (Dacca).

Allgemeine metrische Geometrie. Konvexe Gebilde:

Viola, Tullio: Un problema metrico relativo agli insiemi di punti, nel piano o nello spazio. Boll. Un. mat. Ital., III. S. 5, 64—67 (1950).

Notations. E : Ensemble fermé de points dans l'espace euclidien E_n , E_0 : q -voisinage fermé de E ($q > 0$), A et B : deux points distincts appartenant à la même composante connexe C de $E_n - E$. \mathcal{C} : famille des arcs γ joignant A et B sur C . \mathcal{C}^* : classe d'homotopie de \mathcal{C} . A : borne inférieure de la longueur $\lambda(\gamma)$ pour $\gamma \in \mathcal{C}$. A^* : borne inférieure des $\lambda(\gamma)$ pour $\gamma \in \mathcal{C}^*$. Γ : limite d'une suite convergente (dans E_n) $\gamma_1, \dots, \gamma_n, \dots$ de courbes de \mathcal{C} telle que $\lim \lambda(\gamma_n) = A$, γ : limite d'une suite convergente (dans E_n) $\gamma_1, \dots, \gamma_n, \dots$ de courbes de \mathcal{C}^* telle que $\lim \lambda(\gamma_n) = A^*$. — Propositions. Pour $n = 2$, $\lambda(\gamma) = A^*$ et $\lambda(\Gamma) \leq A$, γ est une somme finie d'arcs convexes. Une courbe de type Γ correspondant à E_0 pour q suffisamment petit est de type γ et Γ est la limite de telles courbes pour une suite $q_1, \dots, q_n, \dots \rightarrow 0$. Pour $n = 3$, E fermé et simplement connexe, toute γ est une Γ : $\lambda(\Gamma)$ peut être $< A$ (l'exemple correspondant sera donné dans une note ultérieure).

Chr. Pauc.

Eggleston, H. G.: Homeomorphisms of s -sets. J. London math. Soc. **24**, 181—190 (1949).

Ist A eine ebene Punktmenge, so bezeichnet man mit U_δ ein System konvexer Punkt mengen mit Durchmesser $d \leq \delta$, die A überdecken. Setzt man dann für ein $\alpha > 0$

$$A_\alpha^*(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\text{fin} \sum_{U_\delta} d^\alpha \right),$$

wobei fin bei Zulassung aller solcher Systeme gebildet wird, und gibt es ein $s > 0$, derart daß $A_\alpha^*(A) = \infty$ für $\alpha < s$ und $A_\alpha^*(A) = 0$ für $\alpha > s$ wird, so heißt A eine s -Menge. Es wird gezeigt, daß es Homöomorphismen der Ebene gibt, die eine abgeschlossene s -Menge mit $1 < s < 2$ in eine t -Menge mit $1 < t < s$ transformieren.

Dinghas (Berlin).

Haegi, H.-R.: Sur le maximum du rayon intérieur. C. r. Acad. Sci., Paris **228**, 891—892 (1949).

Es sei D ein einfach zusammenhängendes Gebiet der komplexen z -Ebene, das den Punkt ∞ und einen weiteren Randpunkt nicht enthält. Für $z \in D$ bezeichne r_z den „inneren Radius“ von D bezüglich z , d. h. den Radius desjenigen schlichten und konformen Bildkreises von D , dessen Zentrum das Bild von z ist, wobei das Vergrößerungsverhältnis in z gleich 1 sein muß. — Die Funktion r_z soll für D^* ein Maximum \hat{r} annehmen. Ist D^* konvex, jedoch von einem unendlichen Parallelstreifen verschieden, so wird \hat{r} in einem einzigen Punkt angenommen, der im zentral-symmetrischen Fall mit dem Zentrum von D^* übereinstimmt. Bedeuten R und ϱ Umkreis- und Inkreisradius, ferner r den „äußeren Radius“ und endlich A den Flächeninhalt von D^* , so gilt für ein beliebiges Gebiet $\varrho \leq \hat{r} < 2\varrho$, für ein konvexes Gebiet $\pi A < 8\pi \hat{r} r < 16A$. Diese Ungleichungen, welche Ergebnisse von G. Pólya und G. Szegő verschärfen, werden ohne Beweis mitgeteilt. Der Nachweis der zweiten Relation soll sich auf die konvexgeometrische Ungleichung $2\varrho R < A < 4\varrho R$ stützen, welche in dem Sinne scharf ist, daß die beiden Koeffizienten nicht durch günstigere ersetzt werden können.

H. Hadwiger (Bern).

Blumenthal, L. M. and L. M. Kelly: New metric-theoretic properties of elliptic space. Rev. Univ. nac. Tucumán A **7**, 81—107 (1949).

Dans cet article est poursuivie l'étude métrique de l'espace elliptique initiée par L. M. Blumenthal dans deux récentes publications [Trans. Amer. math. Soc. **59**, 381—400 (1946); **62**, 431—451 (1947)]. Une caractérisation est donnée pour les pseudo- $E_{1,r}$ quadruples isométriques à un quadruple de $E_{2,r}$. Une „croix“ dans $E_{n,r}$ est définie comme le lieu des points équidistants de deux points distincts. Un „quadruple orthocentrique“ est un système de quatre points de $E_{2,r}$ p_1, p_2, p_3, p_4 tels que $E_{1,r}(p_i, p_j)$ et $E_{1,r}(p_k, p_l)$ soient perpendiculaires pour toute permutation i, j, k, l de 1, 2, 3, 4. Une „base métrique“ dans un espace semi-métrique est un ensemble de points tel qu'il n'existe aucun couple de points distincts de l'espace ayant les mêmes écarts des points de l'ensemble. Voici quelques théorèmes typiques: Un quadruple orthocentrique peut se mouvoir librement dans $E_{2,r}$; il en est de même pour tout système de cinq points sur une croix de $E_{2,r}$ si aucun quadruple du système n'est orthocentrique („Crowding Theorem“). Tout ensemble de huit points dans $E_{2,r}$ contient un triplet de périmètre $< \pi r$, et huit est le plus petit entier pour lequel ce théorème soit valide. D'après une proposition antérieure un triplet de $E_{2,r}$ de périmètre $< \pi r$ est librement mobile. Utilisant le „Crowding Theorem“ comme outil essentiel, les AA. prouvent qu'un ordre de congruence de $E_{2,r}$ dans la classe des espaces semi-métriques est huit; ils signalent une note sans démonstrations par J. Haantjes et J. Seidel [Proc. Akad. Wet., Amsterdam **50**, 892—894 (1950); Indag. math. Amsterdam **9**, 403—405 (1947)] annonçant que l'ordre de congruence en question est 7. L'ordre de congruence se réduit à 5 si les espaces semi-métriques vérifient la condition suivante: Quels que soient les points p_1, p_2, p_3 , le triplet (p_1, p_2, p_3)

est isométrique à un triplet de $E_{1,r}$ ou bien deux au moins des écarts $p_i p_j$ ($i, j = 1, 2, 3; i \neq j$) = $\pi r/2$. Les sous-ensembles équilatéraux de $E_{2,r}$ et $E_{3,r}$ sont complètement classifiés; leur étude est précédée par celle des ensembles des espaces euclidiens à deux et trois dimensions dont les systèmes de distances ne comprennent que deux valeurs. Théorème: La propriété d'être une base métrique pour $E_{2,r}$ n'est pas invariante par congruence à moins que la base contienne plus de cinq points. Toutes les démonstrations sont données en détail; quelques unes comprennent des évaluations numériques d'angles et requièrent une classification de configurations. La technique matricielle remontant à Menger est encore utilisée au début de l'article; à ce propos il faut mentionner qu'un théorème matriciel est déduit du théorème sur l'ordre de congruence de $E_{2,r}$. Une démonstration géométrique élémentaire pour la propriété simple exprimée par le lemme 4.1, page 89, serait désirable.

Chr. Pauc (Le Cap).

Nöbeling, Georg: Über Schnittpunkte zweier ebener stetiger Kurven endlicher Länge in allgemeiner Lage. Math. Z., Berlin **52**, 637—641 (1950).

E bezeichnet die Euklidische Ebene mit rechtwinkligen Koordinaten x und y , K_1 eine feste stetige rektifizierbare Kurve, $(x, y) = f_1(s)$, $0 \leq s \leq L_1$, die Darstellung von K_1 durch die Bogenlänge s , $K_2: (x, y) = f_2(s)$, $0 \leq s \leq L_2$, eine starre bewegliche stetige rektifizierbare Kurve. Mit K_2 ist ein Halbstrahl S fest verbunden, dessen Anfangspunkt a auf K_2 liegt. Als Koordinaten der Lage von K_2 dienen die Koordinaten x und y von a und der Richtungswinkel φ von S . Der Lageraum \mathfrak{L} der (x, y, φ) wird Euklidisch metrisiert und mit Lebesgueschem Maß versehen; tatsächlich kommt es in dieser Arbeit nur auf Nullmengen von Lagen an, die Euklidische Struktur von \mathfrak{L} ist ein Hilfsmittel. Satz: Abgesehen von einer Nullmenge \mathfrak{N} von Lagen gilt dann für jede Lage von K_2 : Der Durchschnitt $K_1 \cdot K_2$ besteht aus höchstens endlich vielen Punkten p^1, \dots, p^n ; für jeden Punkt $p = p^\nu$ ($\nu = 1, \dots, n$) und jedes $j = 1, 2$ existieren nur endlich viele Parameterwerte s_j^μ ($\mu = 1, \dots, m_j$) und jedes $j = 1, 2$ existieren nur endlich viele Parameterwerte s_j^μ ($\mu = 1, \dots, m_j$) derart, daß $f_j(s_j^\mu) = p$ ist: die Kurve K_j hat an jeder Stelle s_j^μ ($\mu = 1, \dots, m_j$) eine (orientierte) Tangente $T_j^\mu = T_j(s_j^\mu)$; es gilt

$$|T_1^1| \dots = |T_{m_1}^{m_1}| \neq |T_2^1| = \dots = |T_{m_2}^{m_2}|$$

(wobei $|T|$ die ungerichtete Gerade bezeichnet, die der gerichteten Geraden T entspricht). Es wird zuerst folgender Hilfssatz bewiesen: Sind M und N zwei Mengen der Ebene E , deren lineare Carathéodory-Maße $L_C(M)$ und $L_C(N)$ den Bedingungen $L_C(N) = 0$ und $L_C(M) < +\infty$ genügen, ist N fest und M in E starr beweglich, dann ist die Menge \mathfrak{N}_0 aller Lagen von M , bei welchen M zu N nicht fremd ist, eine Nullmenge. Mit Hilfe dieses Lemmas lassen sich leicht die drei ersten Forderungen des Satzes durch Ausschaltung von passenden \mathfrak{L} -Nullmengen erfüllen. Besonders interessant ist die zur Erfüllung der vierten Forderung herangezogene Hilfsabbildung Φ . Φ ist eine Abbildung des Quaders $Q = [0 \leq s_1 \leq L_1, 0 \leq s_2 \leq L_2, 0 \leq \psi < 2\pi]$ im Euklidischen Raum aller Zahlentripel (s_1, s_2, ψ) auf die Menge \mathfrak{M} aller Lagen (x, y, φ) , für welche der Durchschnitt $K_1 \cdot K_2$ nicht leer ist; es sei $q = (s_1, s_2, \psi)$ ein Punkt aus Q , dann ist das Φ -Bild (x, y, φ) von q diejenige Lage von K_2 , die entsteht, wenn wir K_2 aus der Null-Lage $(0, 0, 0)$ durch eine Parallelverschiebung zunächst in diejenige Lage $(\bar{x}, \bar{y}, 0)$ bringen, bei welcher die den Parameterwerten s_1 und s_2 entsprechenden Punkte $f_1(s_1)$ und $f_2(s_2)$ von K_1 und K_2 in einen Punkt p zusammenfallen, und sodann K_2 um den Punkt p um den Winkel ψ drehen. Φ ist dehnungsbeschränkt, folglich nullmengentreu. Aus dem oben angeführten Satz folgt Verf. einen zweiten, indem er die (orientierten) Kurven K_1 und K_2 durch deren Träger ersetzt, die rektifizierbare Kontinua sind. Chr. Pauc (Kapstadt).

Mirguet, Jean: Surfaces dont l'ensemble des points à double courbure est dense. C. r. Acad. Sci., Paris **231**, 24—26 (1950).

Es werden hinreichende Bedingungen angegeben dafür, daß die Punkte „Doppelter Krümmung“ (vgl. z. B. dies. Zbl. 33, 305 und frühere Noten) auf Orthoflächen mit endlichem Paratingent des Ranges 2 dicht liegen. *Haupt* (Erlangen).

Zalgaller, V. A.: Der Kreis auf einer konvexen Fläche. Die lokale Fast-Isometrie einer konvexen Fläche mit einem Kegel. Mat. Sbornik, n. S. 26 (68), 401—424 (1950) [Russisch].

L'A. étudie quelques questions de géométrie intrinsèque des surfaces convexes, au sens habituel, de l'espace euclidien; comme dans un travail antérieur, il s'appuie sur un ensemble déjà ancien de définitions, de méthodes, de résultats dus à A. D. Alexandroff (Aleksandrov), permettant de ne pas imposer d'exigences de régularités à cette surface convexe. Au paragraphe 1, l'A. s'occupe de la longueur d'un cercle, au sens de la métrique intrinsèque, sur une surface convexe; il évalue cette longueur en fonction du rayon. Au paragraphe 2, il montre que chaque surface convexe est, localement, presque isométrique à un cône, au sens suivant: en chaque point O de la surface convexe F existe un certain domaine $U_\delta(O)$ correspondant homéomorphiquement à l'environ du sommet d'un certain cône K , de sorte que l'altération de la métrique, en passant de $U_\delta(O)$ à la région correspondante du cône soit infiniment petite en même temps que δ . Dans la démonstration, l'A. donne des conditions nécessaires et suffisantes pour pouvoir établir la correspondance entre les points de la surface et ceux du cône; il évalue explicitement la déformation de la métrique; il montre que la courbure de l'environ $U_\delta(O)$, déduction faite du centre, caractérise la différence de la métrique de la surface avec la métrique euclidienne sur le cône. *B. Gambier* (Paris).

Stone, M. H.: Postulates for the barycentric calculus. Ann. Mat. pura appl., Bologna, IV. S. 29, 25—30 (1949).

Es wird eine Axiomatik des Schwerpunktes gegeben. K sei eine Menge von Punkten x, y, \dots ; Γ ein geordneter Divisionsring mit den als Massen bezeichneten Elementen α, β, \dots . Dann wird gefordert, daß zwei Massen α, β mit $\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta > 0$ in den Punkten x und y stets ein Punkt $(x, y; \alpha, \beta)$ aus K als „Schwerpunkt“ zugeordnet ist, wobei folgende Bedingungen erfüllt sein sollen: $(x, y; \alpha, 0) = x$; $(x, x; \alpha, \beta) = x$; ist $\lambda > 0$, so ist $(x, y; \lambda\alpha, \lambda\beta) = (x, y; \alpha, \beta)$; ist $(x, z; \alpha, \beta) = (y, z; \alpha, \beta)$ für $\alpha > 0$, so ist $x = y$; $((x, y; \alpha, \beta), z; \alpha + \beta, \gamma) = ((z, y; \gamma, \beta), x; \gamma + \beta, \alpha)$. K heißt dann eine abstrakte konvexe Menge über Γ . Es wird bewiesen, daß es zu jeder solchen Menge K einen Vektorraum M über Γ gibt, so daß K eine konvexe Teilmenge von M im üblichen Sinn wird und die Gleichung $z = (x, y; \alpha, \beta)$ übergeht in $(\alpha + \beta)z = \alpha x + \beta y$. *G. Köthe* (Mainz).

Süss, Wilhelm: Über Eibereiche mit Mittelpunkt. Math.-phys. Semesterber., Göttingen 1, 273—287 (1950).

Verf. strebt in den Reihen der Lehrer höherer Schulen das Interesse an der eigenen wissenschaftlichen Arbeit durch Fragestellungen zu wecken, die nur geringe literarische Hilfsmittel benötigen. Diese Arbeit versucht ein Beispiel dieser Art zu geben. — Eine Sehne s eines Eibereiches E durch einen beliebigen Punkt P von E wird eine Minimalsehne von P genannt, wenn der kleinere Flächeninhalt der zwei Teile, in welche E von einer Sehne durch P zerlegt werden kann, am kleinsten ist. Ein Punkt P von E wird ein Ausnahmepunkt genannt, wenn durch ihn mehr als eine Minimalsehne hindurchgeht. — Ein Eibereich E , dessen Punkte mit höchstens abzählbar vielen Ausnahmen nur eine Minimalsehne besitzen, ist ein Mittelpunktseibereich. Hat ein Mittelpunktseibereich E keine Randstrecke, so ist sein Mittelpunkt auch sein einziger Ausnahmepunkt. *Gy. Sz.-Nagy* (Szeged).

Inzinger, Rudolf: Über eine lineare Transformation in den Mengen der konvexen und der stützbaren Bereiche einer Ebene. Mh. Math., Wien 53, 227—250 (1949).

Ein ebener Bereich wird nach H. Geppert (dies. Zbl. 15, 410) stützbar genannt, wenn er sich als formale Differenz zweier Eibereiche im Sinne der Minkowski-

schen Linearkombination darstellen läßt. Ein solcher sei durch die 2π -periodische, stetige und stückweise stetig differenzierbare Stützfunktion $h(\varphi)$ charakterisiert. — Innerhalb der Klasse dieser Bereiche lassen sich die durch die Geschlossenheitsbedingung eindeutig festgelegte α -Evolventoidenbildung $E(\alpha)$ und die α -Evolutoidenbildung $E^{-1}(\alpha)$ als eineindeutige und sich invers entsprechende Transformationen festlegen. Für $E(\alpha)$, durch welche etwa der Bereich H^0 in H^1 transformiert werde, findet Verf. die Integraldarstellung

$$h^1(\alpha) = \frac{1}{\sin \alpha} \int_0^\infty h^0(\varphi - \alpha + \lambda) e^{-\lambda \operatorname{ctg} \alpha} d\lambda,$$

welche im Winkelparameterintervall $0 < \alpha < \pi/2$ gilt. — Bezeichnet die Operation $S(\alpha)$ die zentrisch ähnliche Verkleinerung eines Bereiches im Verhältnis $1 : \cos \alpha$ bezüglich seines Krümmungsschwerpunktes, so ist durch $T(\alpha) = S(\alpha) E(\alpha)$ die durch den Verf. untersuchte Transformation gegeben, die sich bei ihrer Anwendung auf konvexe Bereiche durch eine Reihe bemerkenswerter Eigenschaften auszeichnet: 1. Eine Linearschar wird in eine ebensolche verwandelt; insbesondere gehen Parallelbereiche in ebensolche über. 2. Homothetische Bereiche werden in ebensolche übergeführt. 3. Jeder Kreis ist Fixbereich. 4. Die Randlänge ist invariant; der Flächeninhalt nimmt für Nichtkreise zu. 5. Der Krümmungsschwerpunkt bleibt fest. 6. Fortgesetzte Iteration führt zu einer gleichmäßig konvergenten Eibereichfolge, die gegen den umfangsgleichen, mit dem gemeinsamen Krümmungsschwerpunkt konzentrischen Kreisbereich konvergiert. 7. Bei Nichtkreisen wird der Inkreisradius, die Dicke, die minimale Randkrümmung vergrößert, der Umkreisradius, der Durchmesser und die maximale Randkrümmung dagegen verkleinert.

H. Hadwiger (Bern).

Inzinger, Rudolf: Stützbarer Bereiche, trigonometrische Polynome und Defizite höherer Ordnung. *Mh. Math.*, Wien **53**, 302—323 (1949).

Ausgehend von der von H. Görtler (dies. Zbl. **17**, 189; **18**, 379) eingeführten Darstellung eines stützbaren Bereichs H als Minkowskische Summe $H = \sum_0^\infty H_v$,

seiner hypozykloidalen Komponenten H_v , entwickelt der Verf. eine Theorie, welche in formaler Beziehung derjenigen der Fourierreihen weitgehend parallel verläuft. Die enge gegenseitige Beziehung ergibt sich dadurch, daß die Elemente der Fourierentwicklung der Stützfunktion von H sich interpretieren lassen als die Stützfunktionen der Komponenten H_v . Die Festsetzung eines inneren Produktes führt in der üblichen Weise zu einer Metrisierung der Mannigfaltigkeit der stützbaren Bereiche \mathfrak{M} .

Ein $P_n = \sum_0^n H_v$ heißt Polynombereich, und ein Hauptanliegen des Verf. besteht darin, Defizite $\Delta_{n+1}(H)$ ($n = 1, 2, \dots$) zu entwickeln, deren Verschwinden notwendig und hinreichend dafür sind, daß ein Bereich H zur Klasse \mathfrak{L}_n der Polynombereiche P_n gehört; ihre Berechnung soll indessen nicht die explizite Kenntnis der Komponenten H_v von H voraussetzen, wie dies etwa bei dem auf der Hand liegenden Defizit

$\sum_{n=1}^\infty |H_n|^2$ der Fall ist. — Durch ein Faltungintegral innerhalb der Stützfunktionen wird eine Multiplikation stützbarer Bereiche erklärt, und \mathfrak{M} wird zu einem Stützbereichring. Höhere Faltungspotenzen und Faltungspolynome ermöglichen einen weiteren formalen Ausbau. \mathfrak{M} wird weiter in einem Oberring \mathfrak{N} eingebettet, dessen Elemente Folgen von Polynombereichen sind, die nicht notwendig konvergieren müssen. Es gibt dann ein Einselement in \mathfrak{N} , und die Faltungsmultiplikation ist eindeutig umkehrbar, falls als Divisoren nur Elemente zugelassen sind, die insofern vollständig sind, als sie keine verschwindenden Komponenten aufweisen. Eine vollständige Polynombereichsfolge definiert dann in \mathfrak{N} eine eindeutige und eindeutig umkehrbare lineare Transformation. Es werden spezielle Transformationen kon-

struiert, welche alle zu \mathcal{L}_n gehörenden Komponenten H_ν ($\nu = 1, 2, \dots, n$) eines Bereichs H annullieren. Der Bildbereich reduziert sich dann und nur dann auf den Nullbereich, wenn H zu \mathcal{L}_n gehört; hieraus resultieren Defizite im Sinne der oben erwähnten Zielsetzung. Im Falle „selbstadjungierter“ Bereiche ergeben sich vereinfachende Modifikationen. — Endlich werden noch die Flächeninhalte und die gewöhnlichen isoperimetrischen Defizite der transformierten Bereiche herangezogen und entsprechende Kriterien formuliert. — Angaben über speziellere Transformationen, wie Evoluten- und Evolventenbildung mit Defizitausdrücken, deren Definitheit sich als Verallgemeinerungen des Wirtingerschen Lemmas deuten lassen, und Andeutungen über Zusammenhänge mit der Theorie der kontinuierlichen Differentiation periodischer Funktionen von H. Weyl beschließen die ideenreiche Abhandlung.
H. Hadwiger (Bern).

Inzinger, Rudolf: Über konvexe ebene Bereiche, die eine einparametrische Schar von Größtdreiecken besitzen. Österreich. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl., S.-B., IIa 156, 263—285 (1948).

Falls D einen ebenen abgeschlossenen Dreiecksbereich mit dem Flächeninhalt $F(D)$ bezeichnet, versteht der Verf. unter einem dem ebenen, abgeschlossenen und eigentlich-konvexen Bereich A zugeordneten Größtdreieck \bar{D} ein Teildreieck von A , für welches $F(\bar{D}) = \sup F(D) [D \subset A]$ gilt; analog ist ein Kleinstdreieck \underline{D} ein A enthaltendes Dreieck, für welches $F(\underline{D}) = \inf F(D) [A \subset D]$ gilt. — Elliptische Bereiche haben die Eigenschaft, sowohl eine einparametrische Schar von Größtdreiecken, als auch eine solche von Kleinstdreiecken aufzuweisen; jeder Randpunkt ist Ecke eines \bar{D} , und jede Stützgerade enthält eine Seite eines \underline{D} . Dieser auf affin-geometrischem Wege leicht verifizierbare Sachverhalt ist indessen für die Ellipse nicht charakteristisch. Verf. weist die Existenz nicht elliptischer Eibereiche nach, welche die nämliche Eigenschaft haben. Dies gelingt auf die folgende Weise: Verf. gibt zunächst notwendige Bedingungen, die bei Extremaldreiecken der bezeichneten Art erfüllt sein müssen. Sodann konstruiert er explizite eine Klasse analytischer Eibereiche, für die einparametrische Dreiecksscharen realisiert sind, welche die notwendigen Bedingungen erfüllen. Andererseits kann gezeigt werden, daß jedes Dreieck, das die Bedingungen erfüllt, den Scharen angehört, also sicher auch die Extremaldreiecke. Da aber die Schardreiecke alle flächengleich sind, bestehen sie aus lauter Extremaldreiecken. — Weiter werden zusätzliche Forderungen betrachtet, die nur noch durch elliptische Bereiche erfüllbar sind. Solche sind z. B.: a) Alle Schwerpunkte der Größtdreiecksschar fallen zusammen; b) Die Größtdreiecksschar ist gleichzeitig Kleinstdreiecksschar eines anderen Eibereichs — in diesem Fall sind beide Bereiche konzentrische Ellipsen.
H. Hadwiger (Bern).

Blaschke, Wilhelm: Zur elliptischen Geometrie. Arch. Math., Karlsruhe 1, 353—361 (1949).

Verf. entwickelt einige Gedanken, wie man versuchen kann, die geometrische Theorie konvexer Figuren von J. Steiner, H. Brunn und H. Minkowski auf den elliptischen Raum zu übertragen. Stellt man die Punkte (x_0, x_1, x_2, x_3) des elliptischen Raumes R_3 durch Quaternionen $X = x_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$ dar, so ist die 6-gliedrige Bewegungsgruppe des elliptischen R_3 mit Hilfe von „genormten“ Quaternionen Q, Q' , für die $QQ' = Q'Q = 1$ ist (Q zu Q konjugiert), durch (1) $X^* = QXQ'$ gegeben. Dabei lassen sich die gerichteten Geraden des elliptischen R_3 eindeutig so den Punkten r, r' zweier Einheitskugeln zuordnen, daß die Bewegungen (1) des elliptischen R_3 den Drehungen der beiden Einheitskugeln entsprechen. Der Linearkombination von Punktmengen des Euklidischen wird im elliptischen R_3 die Produktbildung gegenübergestellt: Sind X_1, X_2 die genormten Quaternionen von Punkten zweier Punktmengen M_1 bzw. M_2 , so ist die Menge M der durch

die Quaternionen $X = X_1 X_2$ dargestellten Punkte das Mengenprodukt $M_1 M_2$. X ist nur dann Randpunkt der Produktmenge M , wenn hauptsächlich X_i Randpunkt von M_i ($i = 1, 2$) ist, wobei für die äußeren Normalen $[r_i, r'_i]$ die Bedingung $r'_1 = r_2$ gilt. Dann ist $[r_1, r'_2]$ äußere Normale von M in X . Eine gerichtete geschlossene Fläche F vom Kugelzusammenhang des elliptischen R_3 heißt „schlicht“, wenn ihre äußeren Normalen $[r, r']$ die linke (r) auf die rechte Bildkugel (r') eineindeutig abbilden. Es folgen einige Betrachtungen über Produkte von schlichten Flächen und die Einführung von Scharen von parallelen Flächen im elliptischen R_3 . Ein Versuch, die Linearkombination durch Benutzung ganzzahliger Dichtefunktionen auf mehrfach bedeckte Bereiche zu übertragen, beschließt die Arbeit. *Süss* (Freiburg i. Br.).

Pólya, George: Torsional rigidity, principal frequency, electrostatic capacity and symmetrization. Quart. appl. Math. 6, 267—277 (1948).

Zunächst werden Beweise für die geometrischen Grundeigenschaften des Steinerschen Prozesses der Symmetrisierung skizziert: In der Ebene läßt die Symmetrisierung den Flächeninhalt unverändert und verkleinert den Umfang, im Raum läßt die Symmetrisierung das Volumen unverändert und verkleinert die Oberfläche. Ist D ein Bereich der xy -Ebene, $z = f(x, y)$ eine Funktion, die in D positiv ist und auf dem Rand verschwindet, S der räumliche Bereich der (x, y, z) mit (x, y) in D und $0 < z < f(x, y)$, und sind D^*, S^* die Bereiche, die aus D, S durch Symmetrisierung etwa bezüglich der yz -Ebene entstehen, so hat man damit Beziehungen zwischen Integralen über D , die von $f(x, y)$ abhängen, und Integralen über D^* , die von der zu S^* gehörigen Funktion $f^*(x, y)$ abhängen, und als eine Folgerung die Ungleichung

$$\iint_D (f_x^2 + f_y^2) dx dy \geq \iint_{D^*} (f_x^{*2} + f_y^{*2}) dx dy$$

für die Dirichletschen Integrale. Aus diesen Beziehungen ergeben sich die folgenden Sätze über das Verhalten der im Titel genannten physikalischen Größen bei Symmetrisierung: Symmetrisierung vergrößert die Starrheit eines elastischen zylindrischen Stabes gegen Torsion, verkleinert die Grundfrequenz einer elastischen Membran und verkleinert die elektrostatische Kapazität eines Kondensators, der aus zwei unendlichen Zylindern mit parallelen Erzeugenden besteht, von denen der eine im anderen enthalten ist. Als Anwendung wird gezeigt, daß sich der Wert der Torsions-Starrheit und der Grundfrequenz für einen Rhombus zwischen Grenzen einschließen läßt, die durch die bekannten Werte für Rechtecke bestimmt werden, und daß die folgenden Sätze gelten: Von allen Vierecken gegebenen Flächeninhalts hat das Quadrat die größte Torsions-Starrheit und die kleinste Grundfrequenz, von allen Dreiecken gegebenen Flächeninhalts das gleichseitige, von allen ebenen Bereichen gegebenen Flächeninhalts der Kreis. Die letzte Tatsache über die Torsions-Starrheit wurde von Saint-Venant ohne mathematischen Beweis ausgesprochen.

Bachmann (Kiel).

Polya, Georges: Sur la symétrisation circulaire. C. r. Acad. Sci., Paris 230, 25—27 (1950).

Als Verallgemeinerung der Steinerschen Symmetrisierung eines räumlichen Bereichs S in bezug auf eine Ebene wird die Kreis-Symmetrisierung von S in bezug auf eine Halbebene H eingeführt, die S in einen Bereich S^* mit folgender Eigenschaft überführt: Für jeden Kreis, dessen Mittelpunkt auf der H begrenzenden Geraden liegt und der zu dieser senkrecht ist, sind die Schnitte mit S und S^* gleich lang, und besteht der Schnitt mit S^* aus einem einzigen Bogen, der durch H halbiert wird. Die Kreis-Symmetrisierung läßt das Volumen unverändert und verkleinert die Oberfläche, und man erhält wieder eine Ungleichung für das Dirichletsche Integral, analog der im vorangehenden Referat angegebenen. Als Konsequenzen werden Extremalaussagen für die Grundfrequenz, die Starrheit gegen Torsion und die Kapazität für gewisse ebene Bereiche angegeben, darunter die folgende: Es seien

vier konzentrische Kreise mit den Radien $0 \leq r' \leq r < R \leq R'$ gegeben und Bereiche mit zwei Randkurven betrachtet, von denen die innere in dem Kreisring zwischen (r') und (r) enthalten ist und einen Punkt mit dem Kreis (r) gemein hat, die äußere in dem Kreisring zwischen (R) und (R') enthalten ist und einen Punkt mit (R) gemein hat. Die Kapazität, d. h. $(4\pi)^{-1} \int (\partial u / \partial n) ds$, erstreckt über den äußeren Rand, für u harmonisch im Inneren des Bereiches mit dem Wert 1 auf dem äußeren und dem Wert 0 auf dem inneren Rand, ist ein Minimum, wenn der äußere Rand (R') mit einer Strecke der Länge $R' - R$, der innere Rand (r') mit einer Strecke der Länge $r - r'$ ist und die Strecken auf demselben Durchmesser, aber entgegengesetzten Radien liegen. *Bachmann* (Kiel).

Sips, Robert: Quelques propriétés extrémales du cercle et de la sphère. *Amer. J. Math.* **72**, 595—611 (1950).

Kreis und Kugel besitzen bei einer großen Anzahl physikalischer Problemstellungen gewisse Extremaleigenschaften, bei deren Untersuchung die üblichen Methoden der Variationsrechnung nicht anwendbar sind und man daher auf Einzeluntersuchungen angewiesen ist. Verf. zeigt in Verallgemeinerung Szegö'scher Methoden, daß diese Eigenschaften betrachtet werden können als Spezialfälle einer allgemeinen isoperimetrischen Eigenschaft von Systemen konzentrischer Kreise und Kugeln. Er betrachtet hierzu (im Falle der Ebene) ein System geschlossener, einander nicht im Innern enthaltender Kurven C_{i1}, \dots, C_{in} , die von einer Kurve C_e umschlossen werden, ferner eine nebst den partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige Lösung $z(x, y)$ der Gleichung $\Delta z = f(z)$, die auf den C_i bzw. auf C_e die konstanten Werte z_i bzw. z_e annimmt [$f(z)$ in $z_i \leq z \leq z_e$ positiv und analytisch]. Ist dann S der Inhalt des innerlich von den C_i , äußerlich von der Kurve $z(x, y) = z$ ($= \text{const.}$) begrenzten Gebietes und S_i der Inhalt der von C_i umschlossenen Fläche, so ergibt sich die fundamentale Ungleichung

$$(1) \quad \frac{dz}{dS} \leq \frac{1}{4\pi S} \left[\int_{S_i}^S f(z) dS + \int_{z_i}^z \frac{\partial z}{\partial n} ds \right].$$

Es zeigt sich, daß das Gleichheitszeichen dann und nur dann auftritt, wenn die Kurven $z = \text{const.}$ konzentrische Kreise sind. Entsprechendes gilt im Dreidimensionalen. Auf Grund dieser Ungleichungen werden folgende Probleme behandelt: Der elektrische Kondensator kleinster Kapazität, Extremaleigenschaften kreisförmiger Membranen, höchster Torsionsmodul prismatischer Stäbe, die Kugel als einzige ruhende Gleichgewichtsfigur einer Flüssigkeit, laminare Strömung zäher Flüssigkeiten in zylindrischen Rohren. — Schließlich werden noch aus (1) Ungleichungen über die Greensche Funktion hergeleitet. *Maruhn* (Dresden).

Levi, F. W.: On the isoperimetric problem. *Math. Student, Madras* **17**, 1—25 (1950).

Diskussion der Problemstellung, Zusammenstellung verschiedener Beweise der Maximumeigenschaft des Kreises. Keine neuen Ergebnisse. *Bol.*

Vincze, Stephen: On a geometrical extremum problem. *Acta sci. math.*, Szeged **12A**, L. Fejér et F. Riesz LXX annos natis dedic., 136—142 (1950).

Welches konvexe n -Eck mit n Seiten der Länge l hat den kleinsten Durchmesser? Ist Δ_n das Minimum des Durchmessers, so ist

$$(2 \sin \pi/2n)^{-1} \leq \Delta_n \leq (\sin \pi/n)^{-1}.$$

Ist n ungerade, so wird die untere Schranke vom regelmäßigen n -Eck erreicht, dieses ist also ein Minimalpolygon. Hat n mindestens einen ungeraden Primfaktor, so haben gewisse Polygone, die Reuleaux-Kreisbogenpolygone einbeschrieben sind, die gleichen Eigenschaften. Zu jedem ungeraden Faktor von n gibt es ein derartiges Minimalpolygon. Ist $m = 2^s$, so liefert das regelmäßige n -Eck nicht immer das Minimum, so nicht für $s = 3$. Jedes Minimalpolygon ist einer Kurve

konstanter Breite einbeschrieben, von jeder Ecke geht mindestens ein Durchmesser aus. Vgl. auch K. Reinhardt [Jber. Deutsch. Math. Verein. **31**, 251—270 (1922)].

Bol (Freiburg i. B.).

Angewandte Geometrie:

●Roever, W. H.: The axonometric method of descriptive geometry. — Litho-printed. Ann Arbor: Edwards Brothers, Inc., 1949. — For sale by Washington University Bookstore. — 75 p. \$ 3,00.

Das Buch soll dem Mangel an englisch geschriebenen Lehrbüchern der Axonometrie abhelfen. Es ist eine freie Wiedergabe der Seiten 164 bis 203 der Vorlesungen über darstellende Geometrie von G. Loria (Leipzig/Berlin 1907). Laut Vorwort will das Buch die Verwendung der Axonometrie in der technischen Praxis fördern. Dieses Ziel wird nicht erreicht, da Verf. (ebenso wie Loria) nur spezielle Aufgaben mittels vieler Kunstgriffe löst, während jene Methoden, die alle axonometrischen Konstruktionen auf wenige Grundgedanken zurückzuführen erlauben, nicht erwähnt werden: Zuordnung eines Kreuzrisses zum normalaxonometrischen Bild (Skuhersky 1858, Staudigl 1875), Prinzip der ähnlichen Hilfsfiguren (d'Ocagne 1896), Prinzip der affinen und kollinearen Hilfsfiguren (E. Müller, Kruppa, Leipzig/Wien 1923), Einschnideverfahren [Eckhart, S.-B. Akad. Wiss. Wien, math.-naturw. Kl. IIa **146**, 51—56 (1937); dies. Zbl. **17**, 180].

Hohenberg.

Rössler, Fred: Über verallgemeinerte Reliefperspektiven. Mh. Math., Wien **53**, 211—220 (1949).

Verf. setzt an die Stelle der gewöhnlichen Reliefperspektive (d. h. einer räumlichen Kollineation mit dem Zentrum O , der Inzidenzebene α und der Fluchtebene φ) eine allgemeine zentrische Verwandtschaft, bei der α und φ zwei konzentrische Kugeln bzw. koaxiale Drehkegel sind. Im ersten Fall („Kugelrelief“) ist O der Mittelpunkt beider Kugeln, im zweiten Fall („Kegelrelief“) liegt O auf der Achse beider Kegel. Der Bildpunkt P jedes beliebigen Punktes P wird durch das Doppelverhältnis festgelegt, das P mit O , dem Fernpunkt F_∞ des Sehstrahls \overline{OP} und dem Schnittpunkt A von α und \overline{OP} bestimmt; P bildet mit O , dem Schnittpunkt \bar{F} von φ und \overline{OP} sowie dem Punkt A dasselbe Doppelverhältnis. Die so definierte Abbildung $P \rightarrow P$ ist eine zentrische Verwandtschaft zweiten Grades. Verf. gibt exakte Methoden und Näherungsverfahren zur Darstellung der Bilder einzelner Punkte sowie der Bildkegelschnitte von Geraden und der Bildflächen von Ebenen an; letztere sind im Fall des „Kugelreliefs“ Drehflächen 2. Ordnung mit einem gemeinsamen Brennpunkt, im Fall des „Kegelreliefs“ dagegen Kegelflächen 2. Ordnung mit einer gemeinsamen Fokalachse usw.

H. Horninger (Istanbul).

Krames, Josef: Zur Fehlertheorie der gegenseitigen Orientierung zweier Luftaufnahmen. Österreich. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl., Anz. **1947**, Nr. 8, 6 S. (1947).

Verf. gibt eine vorläufige Mitteilung seiner Untersuchungen über „gefährliche Flächen“ und „gefährliche Raumgebiete“, und deren praktischer Ausnutzung (vgl. die folg. Referate).

M. Piazzolla Beloch (Ferrara).

Krames, Josef: Über allgemeine „gefährliche Raumgebiete“ der Luftphotogrammetrie. Mh. Math., Wien **52**, 265—285 (1948).

Auf anschaulich geometrischem Wege untersucht Verf. die „gefährlichen Raumgebiete“ der Photogrammetrie, nämlich solche, bei denen allgemeine „gefährliche Flächen“ als Grundflächen dienen. Er legt klar, daß die vollständigen geometrischen Begrenzungen solcher Raumgebiete im allgemeinen Falle aus je zwei orthogonalen Regelflächen zweiten Grades bestehen, die mit der Grundfläche einem linearen Büschel angehören (die Grundkurve vierter Ordnung dieses Büschels zerfällt in einen geraden kubischen Kreis und eine seiner Sehnen). Jede andere in diesem Büschel

enthaltene Fläche zweiten Grades ist ebenfalls orthogonal und besitzt zwei adjungierte Erzeugende, welche durch die Aufnahmezentren gehen (dabei ist besonders zu beachten, daß diese Erzeugendenpaare ein kongruentes Strahlbüschel erfüllen). — Werden die beiden Zielstrahlbüschel in allgemeiner Weise gegeneinander verlagert, so existiert immer ein solches Flächenbüschel von folgender Eigenschaft: Die durch die Punkte seiner Flächen jeweils einander zugeordneten Zielstrahlbüschel haben in jeder Lage der Bündel stets dieselbe Parallaxe, und zwar in je zwei von ∞^1 Raumrichtungen, die zu einer Stellung parallel sind, eine andere. Ferner zeigt sich, daß auch umgekehrt jedes Flächenbüschel von der genannten Beschaffenheit auf unendlich viele Arten als Büschel von derartigen Flächen konstanter Parallaxe aufgefaßt werden kann. — Daraus folgt die für die Photogrammetrie wichtige Erkenntnis: Durch die Verlagerung der beiden Zielstrahlbüschel (Projektionssysteme) und die kleinste am Geländemodell gerade noch meßbare y -Parallaxe (die hier über den gesamten Aufnahmeraum konstant vorausgesetzt wird) ist bereits ein „gefährliches Raumgebiet“ vollständig bestimmt. *M. Piazzolla Beloch (Ferrara).*

Krames, Josef: Über die „gefährlichen Raumgebiete“ der Luftphotogrammetrie. Photogr. Korresp., Wien 84, 1—16 (1948).

In dieser Abhandlung beschäftigt sich der Verf. mit der Aufgabe, die mit einer „gefährlichen Fläche“ verknüpften „gefährlichen Raumgebiete“ durch ihre vollständigen geometrischen Begrenzungen festzulegen. — In der vorliegenden Abhandlung erledigt Verf. die Aufgabe für alle Sonderfälle, bei denen „gefährliche Flächen im engeren Sinne“ zugrunde liegen (wo also die Hauptaufgabe zusammenfallende Lösungen aufweist). — Verf. weist nach, daß die zu einer solchen Fläche gehörigen „gefährlichen Raumgebiete“ stets zwischen zwei weiteren solchen Flächen eingeschlossen sind. Dabei gibt es je nach der Größe der im Auswertegerät eben noch feststellbaren y -Parallaxe zugeordneter Zielstrahlen verschiedene Paare derartiger Begrenzungsflächen, welche einem linearen Büschel von untereinander ähnlichen und ähnlich gelegenen orthogonalen Regelflächen zweiten Grades angehören. Die verschiedenen gestaltlichen Möglichkeiten dieser Büschel und Raumgebiete, vor allem die Sonderfälle, werden im Hinblick auf praktische Anwendungen ausführlich besprochen. Es wird gezeigt, wie die beiden Grenzflächen der zu einem gegebenen Verkantungswinkel zwischen Haupt- und Nebenlösung und einer bestimmten y -Parallaxe gehörigen „gefährlichen Raumgebiete“ sich sowohl rechnerisch wie auch zeichnerisch sehr einfach festlegen lassen. Hierbei ergibt sich auch, daß die durch die vorliegenden Ergebnisse bestimmten Abmessungen mit den früher experimentell gefundenen annähernd übereinstimmen. — Sodann werden die bei einer „gefährlichen Fläche im engeren Sinne“ möglichen Bewegungen der Zielstrahlbüschel untersucht, durch die deren orientierte Lage nicht beeinträchtigt wird, und es wird auf den Nutzen der gefundenen Ergebnisse für die praktische Handhabung der Orientierungsgeräte hingewiesen. *M. Piazzolla Beloch (Ferrara).*

Krames, Josef: Über die Flächen konstanter Bildparallaxe und die zugehörigen gefährlichen Raumgebiete. Österreich. Akad. Wiss., math. naturw. Kl., Anz. 1948, Nr. 2, 7 S. (1948).

Verf. erstreckt die bereits bekannten Ergebnisse über die „gefährlichen Raumgebiete“ der Luftphotogrammetrie, welche der Voraussetzung entsprechen, daß die kleinste am Modell feststellbare y -Parallaxe über den ganzen Aufnahmeraum konstant sei (s. vorsteh. Referat), auch auf die Annahme, daß die Bildplatten (angenähert) in einer wagerechten Ebene liegen und die darin gemessenen y -Parallaxen einen bestimmten Wert nicht überschreiten. *M. Piazzolla Beloch (Ferrara).*

Krames, Josef: Über besondere lineare Büschel von Flächen konstanter Bildparallaxe. Österreich. Akad. Wiss., math. naturw. Kl., Anz. 1948, Nr. 4, 7 S. (1948).

Fortsetzung der oben genannten Untersuchungen des Verf. über Flächen konstanter Bildparallaxe: sie werden auf Sonderfälle angewendet. *Piazzolla Beloch.*

Krames, Josef: Allgemeine lineare Büschel von Flächen konstanter Bildparallaxe. Österreich. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl., Anz. 1948, Nr. 5, 9 S. (1948).

Fortsetzung der vorstehend besprochenen Untersuchungen des Verf. in Betracht der allgemeinsten „gefährlichen Raumgebiete“, die bei konstanter Bildparallaxe vorkommen können. Die Eigenschaften dieser Gebiete stimmen mit den bei raumkonstanter γ -Parallaxe festgestellten weitgehend überein. *Piazzolla Beloch.*

Krames, Josef: Die Bedeutung der „gefährlichen Raumgebiete“ für das optisch-mechanische Orientieren von Luftaufnahmen. Photogr. Korresp., Wien 84, 41—50 (1948).

In dieser Abhandlung behandelt Verf. jene besonderen „gefährlichen Raumgebiete“, die mit den einfachsten, beim optisch-mechanischen Orientieren tatsächlich ausgeführten „Grundoperationen“ verbunden sind, und untersucht den Einfluß der „gefährlichen Raumgebiete“ auf die Genauigkeit der gegenseitigen Orientierung.

M. Piazzolla Beloch (Ferrara).

Krames, Josef: Untersuchungen über „gefährliche Flächen“ und „gefährliche Räume“ mittels des Aeropjektors „Multiplex“. Österreich. Ing. Arch. 2, 123—132 (1948).

In vorliegender Abhandlung berichtet Verf. über praktische Versuchsarbeiten, anschließend an seine geometrischen Forschungen über „gefährliche Flächen“ der Luftphotogrammetrie. Es zeigte sich, daß das beobachtete Verhalten der aufgenommenen Bildpaare von „gefährlichen Flächen“ mit den durch theoretische Überlegungen klargestellten Eigenschaften durchweg im Einklang steht, sowie, daß das erwartete „freie Spiel“ der mechanischen Einpassung erstaunlich groß wird, sobald zwei nur wenig voneinander abweichende Lösungen der Hauptaufgabe in Frage kommen.

M. Piazzolla Beloch (Ferrara).

Krames, Josef: Genauigkeitssteigerung der gegenseitigen Einpassung von Luftaufnahmen auf Grund noch nicht beachteter Bedingungsgleichungen zwischen den Orientierungsgrößen. Österreich. Z. Vermessungswesen 36, 25—45, 56—61 (1948).

Verf. drückt die gegenseitige Abhängigkeit, welche zwischen den Orientierungsgrößen von zwei Luftaufnahmen besteht, durch streng mathematische allgemeine Relationen aus, im Zusammenhange mit der vom Verf. entwickelten Theorie der „gefährlichen Flächen“ und „gefährlichen Raumgebiete“. — Ferner weist Verf. auf die praktischen Anwendungen der von ihm aufgestellten Relationen hin, welche auch als Bedingungsgleichungen zwischen den Orientierungsgrößen anzusehen sind, und gibt einige konkrete Beispiele und Vergleiche mit früheren Untersuchungen anderer Autoren.

M. Piazzolla Beloch (Ferrara).

Krames, Josef: Über Bedingungsgleichungen für die Orientierungsunbekannten beim gegenseitigen Einpassen von Luftaufnahmen. Österreich. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl., Anz. 1948, Nr. 6, 2 S. (1948).

Vorläufige Mitteilung der vorstehend besprochenen Arbeit.

M. Piazzolla Beloch (Ferrara).

Krames, Josef: Graphische Lösung der Hauptaufgabe beim Normalfall der Luftphotogrammetrie. Österreich. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl., Anz. 1949, 93—99 (1949).

Verf. bemerkt, daß die Hauptaufgabe der Luftphotogrammetrie, die Bündelverlagerung, in der Regel auf die folgende zurückgeführt werden kann: Gegeben sind eine Anzahl von Raumpunkten und die an diesen Stellen beobachteten kleinen Restparallaxen zugeordneter Zielstrahlen: man suche eine Verlagerung der beiden Bündel, bei der alle diese Parallaxen zum Verschwinden kommen. Er gibt ein neues Verfahren zur Lösung dieser Aufgabe an, welches an Genauigkeit die gebräuchlichen Orientierungsmethoden übertrifft und die gesuchte Bündelverlagerung durch die „Grundfläche“ des zugehörigen „gefährlichen Raumgebietes“ auf zeichnerischem Wege festlegt.

M. Piazzolla Beloch (Ferrara).

Krames, Josef: Gegenseitige Orientierung von Luftaufnahmen mittels linien-geometrischer Konstruktionen. Österreich. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl., Anz. 1949, 128—135 (1949).

An die vorsteh. besprochene Mitteilung anknüpfend (vgl. vorsteh. Referat) zeigt Verf., wie auch im Falle, daß fünf allgemein gelegene Punkte und die Verhältnisse der dort gemessenen Parallaxen bekannt sind, die Lösung der beim Normalfall der Luftphotogrammetrie auftretenden Hauptaufgabe auf zeichnerischem Wege gelöst werden kann. *M. Piazzolla Beloch (Ferrara).*

Krames, Josef: Zur Abhängigkeit zwischen den Orientierungsgrößen beim gegenseitigen Einpassen von Luftaufnahmen. Österreich. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl., Anz. 1950, Nr. 1, 7—11 (1950).

Verf. bringt die Bedingungsgleichungen, welche für die Orientierungsunbekannten beim gegenseitigen Einpassen von Luftaufnahmen bestehen mit einem vom Verf. entwickelten graphischen Verfahren (vgl. die beiden vorsteh. Referate) in Verbindung und leitet einige weitere Relationen ab. *M. Piazzolla Beloch.*

Schaller, H.: Zum räumlichen Rückwärtseinschneiden. Mh. Math., Wien 53, 184—186 (1949).

Verf. behandelt das klassische Problem des räumlichen Rückwärtseinschneidens ein gegebenes Dreieck $S(u, v, w)$ nach einem gegebenen Dreieck ABC zu schneiden und gibt eine ziemlich komplizierte planimetrische graphische Lösung, indem er das Problem auf die Bestimmung der Schnittpunkte eines Kreises und einer bizirkularen Kurve vierter Ordnung reduziert. — Verf. hebt nicht hervor, daß von den 8 Schnittpunkten 4 in die unendlich fernen absoluten Punkte fallen und daß somit, abgesehen von diesen das ursprüngliche Problem nicht angehenden Lösungen, dieses vier Lösungen zuläßt, was mit den klassischen Resultaten übereinstimmt. — Die von Verf. angegebene Konstruktion, wenn auch theoretisch exakt, hat, wie ersichtlich, keinen praktischen Wert. — Verf. ignoriert übrigens fast alle in letzter Zeit veröffentlichten graphischen Lösungen des Problems, im besonderen diejenigen des Ref. selbst. *M. Piazzolla Beloch (Ferrara).*

Carver, W. B.: The problem of eight points. Amer. math. Monthly 57, 307—310 (1950).

In jedem der Punkte E, F, G und H werden die Winkel α, β und γ gemessen unter denen AB, BC und CD erscheinen; wie groß sind die Abstände? Dieses Problem löst Puissant in *Traité de topographie, d'arpentage et de nivellement*. Paris 1820, Seite 55 in folgender Weise. B habe die Koordinaten 0 und 0, C 1 und 0, A $-h$ und k , D $r+1$ und s und E u und v .

$$u^2 + v^2 + \{h - k \operatorname{ctg} \alpha\} u - \{h \operatorname{ctg} \alpha + k\} v = 0, \quad u^2 + v^2 - u - v \operatorname{ctg} \beta = 0,$$

$$u^2 + v^2 - \{r - s \operatorname{ctg} \gamma + 2\} u - \{r \operatorname{ctg} \gamma + s\} v = -r + s \operatorname{ctg} \gamma - 1.$$

u und v werden eliminiert.

$$\begin{aligned} & \{\operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \gamma + \operatorname{ctg} \gamma \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta - 1\} \{h r - k s\} \\ & + \{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma - \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \gamma\} \{k r + h s\} \\ & - (h + r + 1 - k \operatorname{ctg} \alpha - s \operatorname{ctg} \gamma) / \sin^2 \beta = 0. \end{aligned}$$

Diese 4 Gleichungen werden durch $h r - k s = z$, $k r + h s = w$, $h + r + 1 = t$ in z, w, t, k und s linear und homogen. Mit der Lösung $z = Z k$, $w = W k$, $t = T k$: $s = S k$ folgt aus den Gleichungen für w und t $S h + r = W$, $h + r = T k - 1$. Die Lösung h und r dieser beiden Gleichungen wird in die Gleichung für z eingesetzt. $S \{(S-1)^2 + T^2\} k^2 - \{2 S T + T W + S T W - (S-1)^2 Z\} k + \{W + 1\} \{W + S\} = 0$.

Verf. bemerkt: Wenn $S = 0$, ist die Gleichung für k nicht quadratisch, sondern linear. Die 3 Koeffizientendeterminanten können $= 0$ werden. Die gemessenen Winkel sind bis auf ganze Vielfache von 2π bestimmt; in Puissants Verfahren geht

nur ihr tg ein. Die Wurzel k' der quadratischen Gleichung ergebe h' , r' und s' . Zwischen h, k, r, s und h', k', r', s' besteht eine involutorische Cremonatransformation des 4-dimensionalen Raumes. Auch zwischen u, v und u', v' besteht eine Cremonatransformation. Fundamentalpunkte sind A, B, C, D und die imaginären Kreispunkte. Die Fundamentalkurven sind die 6 Kurven 2. Grades durch je 5 Fundamentalpunkte. Die 4 reellen Fundamentalkurven sind die Kreise durch je 3 der Punkte A, B, C und D . Wenn E auf dem Kreise ABC liegt, fällt E' mit D' zusammen.

Konrad Ludwig (Hannover).

Topologie:

•Freudenthal, H., J. de Groot, A. van Heemert, D. van Dantzig, B. L. van der Waerden, G. Hirsch und J. C. H. Gerretsen: Sieben Vorträge über Topologie. Herausgegeben von H. Freudenthal und W. Peremans. (Centrumsreihe, herausgeg. f. d. Math. Centrum in Amsterdam, Nr. 1). Gorinchem: J. Noorduijn en Zoon N. V. 1950. 133 S. Fl. 6, — [Holländisch].

Die bei einem Lehrerferienkurs in Amsterdam im Sommer 1947 gehaltenen Vorträge sollen einen Einblick vermitteln in neuere Methoden und Ergebnisse der Topologie. Vortragsthemen: Beispiele topologischer Untersuchungen, der Dimensionsbegriff und die nullte Dimension, Pathologische Kurven, topologisch-algebraische Orientierung, der Satz von Jordan-Brouwer, Eine Beziehung zwischen der projektiven Geometrie und einigen Problemen der Topologie, Einige Beispiele zweiblättriger dreidimensionaler Überdeckungsräume. Der Nachdruck liegt auf Fragen der mengentheoretischen Topologie, insbesondere der Kurventheorie. Erwähnenswert ist die besonders klare und anschaulich-geometrische Darstellung dieser zum Teil nicht einfachen Dinge. Besondere Beachtung verdient die von van der Waerden gegebene neue Beweisanordnung für den Satz von Jordan-Brouwer.

Bol (Freiburg i. B.)

Esenin-Vol'pin, A. S.: Über die Existenz eines universellen Bikompaktums von beliebigem Gewicht. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 68, 649—652 (1949) [Russisch].

Ein Bikompaktum des Gewichtes τ heiße „universell“, wenn es stetig auf ein beliebiges Bikompaktum des Gewichtes τ abgebildet werden kann. Da nach Alexandroff jedes Bikompaktum stetiges Bild eines nulldimensionalen Bikompaktums des gleichen Gewichtes ist, genügt es, nulldimensionale Bikompakta zu betrachten. Ein nulldimensionales Bikompaktum kann eindeutig durch eine Boolesche Algebra bestimmt werden. Es seien A und B nulldimensionale Bikompakta, \mathfrak{A} und \mathfrak{B} die ihnen entsprechenden Booleschen Algebren. A läßt sich dann und nur dann stetig auf B abbilden, wenn \mathfrak{B} sich isomorph in \mathfrak{A} abbilden läßt. Daher ist die Untersuchung der nulldimensionalen Bikompakta und ihrer stetigen Abbildungen aufeinander gleichbedeutend mit dem Studium von Booleschen Algebren und ihrer Isomorphismen. Die Frage der Existenz eines universellen Bikompaktums des Gewichtes τ kann daher auch so formuliert werden: Existiert eine universelle Boolesche Algebra der Mächtigkeit τ , derart daß jede Boolesche Algebra der Mächtigkeit τ in sie isomorph abgebildet werden kann? Verf. konstruiert eine Boolesche Algebra, in die jede Boolesche Algebra der Mächtigkeit τ isomorph abbildbar ist. Zum Beweise der Behauptung, daß ihre Mächtigkeit τ ist, benutzt Verf. die verallgemeinerte Kontinuumshypothese $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ für beliebiges α . Die Existenz eines universellen Bikompaktums des Gewichtes τ ist also unter der Voraussetzung der verallgemeinerten Kontinuumshypothese damit bewiesen.

Thimm (Bonn).

Smirnov, Ju.: Über Systeme von Überdeckungen topologischer Räume. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 69, 611—613 (1949) [Russisch].

Alle betrachteten Überdeckungen sind endlich und offen. Die Überdeckung β heiße der Überdeckung α „einbeschrieben“, wenn jedes Element von β in einem

Element von α enthalten ist. Eine Menge Σ von Überdeckungen des Raumes R heiße „definierendes System von R “, wenn in jede Überdeckung von R eine zu Σ gehörige einbeschrieben ist. Unter den definierenden Systemen von R ist eines von kleinster Mächtigkeit, die als „kombinatorisches Gewicht $\sigma(R)$ von R “ bezeichnet werde. — Von den (meistens ohne Beweise) angegebenen Sätzen über $\sigma(R)$ seien folgende erwähnt: 1. Notwendig und hinreichend für die Kompaktheit eines regulären Raumes (mit unendlich vielen Punkten) ist die Abzählbarkeit von $\sigma(R)$. 2. Die Anzahl aller zugleich offenen und abgeschlossenen Mengen des Raumes R ist höchstens $\sigma(R)$. 3. Das kombinatorische Gewicht jedes normalen Raumes R ist gleich dem Gewicht seiner maximalen bikompakten Erweiterung αR [vgl. P. S. Alexandroff, Mat. Sbornik, n. S. 5, 403—423 (1939); dies. Zbl. 22, 412]. 4. Wenn der normale Raum R' stetiges Bild des normalen Raumes R ist, so gilt $\sigma(R') \leq \sigma(R)$. 5. Für eine beliebige normale Erweiterung R^* des normalen Raumes R gilt: $\sigma(R^*) \leq \sigma(R)$. 6. U sei eine offene Menge des Raumes R . Mit $O(U)$ werde die größte in αR (vgl. 3.) offene Menge bezeichnet, die der Bedingung $O \cap R = U$ genügt. Das System aller zugleich offenen und abgeschlossenen Mengen des Raumes R läßt sich umkehrbar eindeutig und isomorph abbilden auf das System aller zugleich offenen und abgeschlossenen Mengen des Raumes αR , und zwar mittels des Operators $O(U)$, als dessen Umkehrung die Durchschnittsbildung mit R erscheint.

Thimm (Bonn).

Vilenkin, N. Ja.: Direkte Spektren topologischer Abelscher Gruppen und ihre Limesgruppen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 72, 617—620 (1950) [Russisch].

Verf. betrachtet topologische abelsche Gruppen G , in denen eine „Beschränktheit“ ähnlich wie bei Hu [J. Math. pur. appl., Paris, IX. S. 28, 287—320 (1949)] definiert ist, und gibt einige Sätze (ohne Beweise) über solche Gruppen, ihre geeignet topologisierten und mit Beschränktheit versehenen Charaktergruppen sowie über inverse und direkte Spektren solcher Gruppen an. Hierzu wird auch für ein direktes Spektrum eine topologisierte und mit Beschränktheit versehene Limesgruppe definiert. Unter geeigneten Voraussetzungen über das direkte Spektrum gilt dann z. B. wieder der Satz, daß die direkte Limesgruppe vollständig isomorph ist zur Limesgruppe des inversen Spektrums der Charaktergruppen. Dabei heißt ein Homomorphismus $\varphi: G \rightarrow G'$ vollständig, wenn für jede beschränkte Menge $A \subset G$ auch $\varphi(A)$ in G' beschränkt ist und für jede beschränkte Menge $A' \subset G'$ eine beschränkte Menge $B \subset G$ mit $A' \cap \varphi(G) \subset \varphi(B)$ existiert. — Für ein direktes Spektrum aus bikompakten Gruppen hat auch Čogošvili [Doklady Akad. Nauk. SSSR, n. S. 46, 143 (1945)] eine topologisierte Limesgruppe definiert. Es existiert eine stetige algebraisch-isomorphe Abbildung der Limesgruppe des Verf. auf eine überall dichte Untergruppe der Limesgruppe von Čogošvili. Burger.

Whitehead, J. H. C.: On group extensions with operators. Quart. J. Math. (Oxford II. Ser.) 1, 219—228 (1950).

Sei G eine (additive) abelsche Gruppe, Y eine (multiplikative) Gruppe, die auf G operiert. Die Kohomologiegruppen $H^2(Y, G)$ bzw. $H^3(Y, G)$ hängen bekanntlich mit den Erweiterungen von G durch Y bzw. mit den Y -Kernen mit Zentrum G zusammen (vgl. Eilenburg-MacLane, dies. Zbl. 29, 340). Verf. verallgemeinert diese Zusammenhänge auf Operatorgruppen. Sei also noch X eine (multiplikative) Gruppe von Operatoren für Y und G , derart daß $x(yg) = (xy)(g)$ für alle $x \in X$, $y \in Y$, $g \in G$ gilt. Es werden zunächst „Vektorkohomologiegruppen“ $\mathcal{S}_p^n(X, Y; G)$ ($0 \leq p \leq n$) folgendermaßen definiert: Die Kokettengruppe $C^{m,n} = C^{m,n}(X, Y; G)$, bestehend aus allen Funktionen $c(x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_n)$ mit Werten in G , kann sowohl als Kokettengruppe $C^m(X, C^n(Y, G))$ als auch als $C^n(Y, C^m(X, G))$ aufgefaßt werden. Es sind daher für $C^{m,n}$ zwei Korandoperatoren $\delta_x: C^{m,n} \rightarrow C^{m+1,n}$ und $\delta_y: C^{m,n} \rightarrow C^{m,n+1}$ definiert: wobei zur Definition von δ_x die vordere bzw. hintere Operationsweise von X auf $c \in C^n(Y, G)$ durch $(xc)(y_1, \dots, y_n) = xc(y_1, \dots, y_n)$ bzw.

$(c\ x)(y_1, \dots, y_n) = c(x\ y_1, \dots, x\ y_n)$ erklärt ist, zur Definition von δ_y die vordere Operationsweise von Y auf $c \in C^m(X, G)$ durch

$$(y\ c)(x_1, \dots, x_m) = (x_1 \dots x_m\ y)\ c(x_1, \dots, x_m).$$

Sei \mathfrak{C}^n die Gruppe (mit Vektoraddition), deren Elemente die $(n+1)$ -tupel (c_0, \dots, c_n) mit $c_k \in C^{k, n-k}$ sind. Es wird ein Korand $\Delta: \mathfrak{C}^n \rightarrow \mathfrak{C}^{n+1}$ erklärt durch $\Delta(c_0, \dots, c_n) = (c'_0, \dots, c'_{n+1})$ mit $c'_k = \delta_x c_{k-1} + (-1)^k \delta_y c_k$ ($c_{-1} = c_{n+1} = 0$). Es ist $\Delta\Delta = 0$. Sei $\mathfrak{C}_p^n \subset \mathfrak{C}^n$ die Untergruppe der $(c_0, \dots, c_p, 0, \dots, 0)$. Dann ist

$$\mathfrak{B}_p^n = (\mathfrak{C}_p^n \cap \Delta^{-1}(0)) - \Delta\mathfrak{C}_p^{n-1}.$$

Sei (E, Φ) eine X -Erweiterung von Y durch G , d. h. eine (nicht notwendig abelsche) Gruppe $E \supset G$ mit X als Operatoren und ein Operatorhomomorphismus Φ von E auf Y mit dem Kern G , wobei durch die inneren Automorphismen mit $\Phi^{-1}(y)$ in G gerade der Operator y induziert wird. Die Äquivalenz solcher X -Erweiterungen wird in naheliegender Weise erklärt. Dann sind die Typen der X -Erweiterungen von Y durch G eineindeutig bezogen auf die Elemente von $\mathfrak{H}_1^2(X, Y; G)$ durch folgende Vorschrift: Man wähle die Repräsentanten $e(y) \in \Phi^{-1}(y)$ und setze $[E$ additiv geschrieben] $c_0(y_1, y_2) = e(y_1) + e(y_2) - e(y_1 y_2)$, $c_1(x; y) = x e(y) - e(x y)$. Dann ist (E, Φ) die Kohomologieklassse von $(c_0, c_1, 0)$ zugeordnet. — In ähnlicher Weise wird der Begriff des Y -Kernes mit Zentrum G zu dem des (X, Y) -Kernes mit Zentrum G erweitert und seine Beziehungen zu $\mathfrak{H}_2^3(X, Y; G)$ untersucht. Diese Untersuchung geschieht durch Zurückführung der (X, Y) -Kerne auf gewöhnliche W -Kerne, wo die Gruppe W in naheliegender Weise aus den Operatorpaaren (y, x) gebildet ist.

Burger (Frankfurt/M.).

Whitehead, J. H. C.: A certain exact sequence. Ann. Math., Princeton, II. S. 52, 51—110 (1950).

Die Arbeit enthält die Beweise der in einer früheren Note (dies. Zbl. 35, 389) mitgeteilten Sätze des Verf. über den Homotopietyp der vierdimensionalen einfach-zusammenhängenden Komplexe [Komplex = CW-Komplex im Sinne des Verf., Bull. Amer. math. Soc. 55, 213—245; 453—496 (1949); zitiert als CH I und CH II]. Die Folge $S_n(K)$ (Bezeichnungen wie im angeführten Referat) wird für beliebige CW-Komplexe K eingeführt, ausgehend von der nichtexakten Gruppenfolge

$$(C, A); \dots \rightarrow \pi_{n+1}(K^{n+1}, K^n) \xrightarrow{\beta} \pi_n(K^n) \xrightarrow{k} \pi_n(K^n, K^{n-1}) \rightarrow \dots$$

Die Konstruktion von $S_n(K)$ aus (C, A) wird unabhängig von jeder Bezugnahme auf einen Komplex K rein algebraisch eingehend untersucht. Der Satz über die Homotopietypen der einfach-zusammenhängenden K^4 wird bewiesen, indem zu jedem eigentlichen Homomorphismus $S_4(K^4) \rightarrow S_4(K'^4)$ (unter Benutzung eines Fortsetzungssatzes aus CH II) eine realisierende Abbildung $\Phi: K^4 \rightarrow K'^4$ konstruiert wird (realizability theorem) und aus einem Satz aus CH I unmittelbar gefolgert wird, daß eine Abbildung $\Phi: K^4 \rightarrow K'^4$, die einen Isomorphismus $S_4(K^4) \approx S_4(K'^4)$ induziert, eine Homotopieinverse besitzt (d. h. eine Abbildung $\Phi': K'^4 \rightarrow K^4$, so daß $\Phi\Phi'$ und $\Phi'\Phi$ zur Identität homotop sind) (sufficiency theorem). Auch das zweite realizability theorem, daß jede algebraisch gegebene Folge S_4 mit $\Gamma(\pi_2) \approx \Gamma_3$ und $\Gamma_2 = 0$ eine geometrische Realisierung durch einen Komplex K zuläßt, wird durch direkte Konstruktion von K bewiesen. Die angegebenen Sätze über den Homotopietyp der vierdimensionalen einfach-zusammenhängenden Komplexe gestatten auch die Aufstellung entsprechender Sätze für den 4-Typ (vgl. CH I) eines beliebigen einfach-zusammenhängenden Komplexes. Ferner lassen sich entsprechende Sätze über den Homotopietyp der $(n+2)$ -dimensionalen Komplexe K mit $\pi_1(K) = \pi_2(K) = \dots = \pi_{n-1}(K) = 0$ bzw. über den $(n+2)$ -Typ beliebiger n -dimensionaler derartiger Komplexe K beweisen, die sogar in gewissen Punkten einfacher sind [vgl. hierzu Verf., Ann. Soc. Polonaise Math. 21, 176—186 (1948)]. — Die Konstruktion der Gruppe $\Gamma(A)$ aus der Gruppe A wird ebenfalls

rein algebraisch untersucht: $\Gamma(A)$ ist eine abelsche Gruppe mit den Erzeugenden $\gamma(a)$ ($a \in A$) und den Relationen (1) $\gamma(a) = \gamma(-a)$, (2) $[a, b + c] = [a, b] + [a, c]$ ($[a, b] = \gamma(a + b) - \gamma(a) - \gamma(b)$; $a, b \in A$). Für eine Reihe von Gruppen A wird $\Gamma(A)$ explizit angegeben. Wegen der Relationen (2) kann man durch die Paarung $[a, b]$ das Cupprodukt $x \cup y$ für zwei Elemente x, y aus der n -ten (Čechschen) Kohomologiegruppe $H^n(X, A)$ eines beliebigen Raumes X über der Koeffizientengruppe A erklären. Es ist $x \cup y \in H^{2n}(X, \Gamma(A))$. Ferner läßt sich für gerades n eine topologisch invariante Abbildung $p: H^n(X, A) \rightarrow H^{2n}(X, \Gamma(A))$ erklären, für die $p(x + y) = px + py + x \cup y$ und $2px = x \cup x$ gilt und welche für einen endlichen Simplicialkomplex X und $A = \text{Gruppe der ganzen Zahlen mod } 2m$, $\Gamma(A) = \text{Gruppe der ganzen Zahlen mod } 4m$ in das gewöhnliche Pontrjagin-Quadrat der Kohomologieklassen übergeht. Sei K ein einfach-zusammenhängender endlicher Komplex, $u: H^n(K, A) \rightarrow \text{Hom}(H_n, A)$ der in üblicher Weise definierte Homomorphismus. Für $n = 2$ ist u ein Isomorphismus auf, so daß $H^2(K, H_2) \approx \text{Hom}(H_2, H_2)$ ist. Sei $1 \in \text{Hom}(H_2, H_2)$ die Identität. Dann wird für den „secondary boundary operator“ $b: H_4 \rightarrow I_3$ die Darstellung $b = u p(1)$ bewiesen. Mittels dieser Darstellung wird ein neuer Beweis eines Satzes von G. Hirsch (dies. Zbl. 35, 110) gegeben. Ebenfalls folgt aus ihr (und einer gewissen Verallgemeinerung davon), daß die Folge $S_4(K)$ für einen einfach-zusammenhängenden endlichen Komplex durch finite Konstruktion bestimmt werden kann. — Die Folgen S_n lassen sich auch für einen beliebigen stetig-zusammenhängenden topologischen Raum X einführen, indem man den (abstrakten) singulären Komplex des Raumes X in gewisser Weise als CW-Komplex $K(X)$ realisiert [vgl. hierzu auch Giever, Ann. Math., Princeton, II. S. 51, 178 (1950)] und $S(X) = S(K(X))$ setzt. Falls X von einem CW-Komplex „beherrscht“ wird (vgl. CH I), sind X und $K(X)$ vom gleichen Homotopietyp. Dies wird im Anhang benutzt zum Beweis des Satzes, daß jeder stetig-zusammenhängende Raum, der von einem abzählbaren CW-Komplex beherrscht wird, vom gleichen Homotopietyp ist wie ein gewisses lokal-endliches Polyeder. *Burger* (Frankfurt).

Postnikov, M. M.: Klassifikation der stetigen Abbildungen eines $(n + 1)$ -dimensionalen Komplexes in einen zusammenhängenden topologischen Raum, der in allen Dimensionen kleiner als n asphärisch ist. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 71, 1027—1028 (1950) [Russisch].

Für das in der Überschrift genannte Problem kann man sich auf „normale“ Abbildungen $f: K \rightarrow K^{n+1} \rightarrow Y$ beschränken, d. h. solche, die K^{n+1} in einen festen Punkt von Y abbilden. Eine normale Abbildung f bestimmt in bekannter Weise einen n -Kozyklus d_f^n mit Koeffizienten in der Homotopiegruppe $\pi_n(Y)$, und zwei Abbildungen f, g sind dann und nur dann homotop zu Abbildungen f', g' mit $f'|K^n = g'|K^n$, wenn d_f^n kohomolog zu $d_{g'}^n$ ist. Man kann sich also weiter auf solche Abbildungen f, g beschränken, die auf K^n zusammenfallen. Sie bestimmen bekanntlich einen Differenz-Kozyklus $d_{f,g}^{n+1}$ mit Koeffizienten in $\pi_{n+1}(Y)$. Das Klassifikationsproblem wird gelöst durch den Satz 1: Zwei solche Abbildungen $f, g: K^{n+1} \rightarrow Y$ ($n \geq 3$) sind dann und nur dann homotop, wenn es eine Kohomologiekategorie e^{n-1} von K [Koeffizienten in $\pi_n(Y)$] gibt, so daß $d_{f,g}^{n+1} \in Sq_{n-3} e^{n-1}$ ist. Dabei ist Sq_i die Steenrodsche Quadrierungsoperation (Steenrod, dies. Zbl. 30, 416) der p -ten Kohomologiegruppe mit Koeffizienten in $\pi_n(Y)$ in die $(2p - i)$ -te Kohomologiegruppe mit Koeffizienten in $\pi_{n+1}(Y)$, wobei eine beliebige (immer existierende) bilineare kommutative Paarung $\alpha \beta \in \pi_{n+1}$ ($\alpha, \beta \in \pi_n$) mit $2\alpha\beta = 0$, $\eta(\alpha) = \alpha \wedge$ zugrunde gelegt wird, wobei $\eta(\alpha)$ aus α durch Vorschalten einer nichttrivialen Abbildung der $(n + 1)$ -Sphäre in die n -Sphäre entsteht. — Dieser Satz folgt wie bei Steenrod (l. c.) aus dem Satz 2: Seien $K \rightarrow K^{n+2}$, A ein Unterkomplex von K , f und g normale Abbildungen von $K^n + A$ in Y , die auf A übereinstimmen und auf $K^{n+1} + A$ fortsetzbar sind. Dann ist die Kokette $d_f^n - d_g^n$ ein Kozyklus mod A . Sei d^n ihre Kohomologiekategorie. Dann gilt für die „zweiten Hindernisse“ $\mathcal{Z}_f^{n+2}, \mathcal{Z}_g^{n+2}$ von f und g (vgl. Eilenberg, dies. Zbl. 22, 407) $\mathcal{Z}_f^{n+2} - \mathcal{Z}_g^{n+2} = Sq_{n-2} d^n$. Beweise werden nicht gegeben. — Das Problem ist für $Y = n$ -Sphäre von Steenrod (l. c.) behandelt worden, für $n = 2$ [und $\pi_2(Y)$ mit endlichem Erzeugendensystem] von Verf. (dies. Zbl. 34, 257). In der letzteren Arbeit ist im Text irrtümlich der einfache Zusammenhang für K (statt für Y) gefordert worden, was Verf. in der vorliegenden Note richtigstellt. [Vgl. auch Whitney, Ann. Math., Princeton, II. S. 50, 270 (1949)].

Burger (Frankfurt a. M.).

Alexandroff (Aleksandrov), P. und K. Sitnikov: Über stetige Abbildungen geschlossener Mannigfaltigkeiten. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 71, 821—823 (1950) [Russisch].

Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ einer Punktmenge X eines euklidischen Raumes heißt α -Abbildung, wenn die Urbildmenge jedes Punktes aus fX einen Durchmesser kleiner α hat. Über solche α -Abbildungen f werden folgende Sätze bewiesen: 1. Sei X ein kompakter Umgebungsretrakt in einem euklidischen oder Hilbertschen Raume, Y ein beliebiges Kompaktum, dann erzeugt f bei hinreichend kleinem α Isomorphismen der Homologiegruppen von X in die von Y . 2. Sei X eine orientierbare n -dimensionale geschlossene Pseudomannigfaltigkeit in einem euklidischen oder Hilbertschen Raume, Y ebenfalls eine n -dimensionale geschlossene Pseudomannigfaltigkeit, dann folgt aus der Existenz einer α -Abbildung $f: X \rightarrow Y$ für hinreichend kleines α , daß Y orientierbar und der Abbildungsgrad gleich ± 1 ist. Ist X darüber hinaus Homologiemannigfaltigkeit, Y desgleichen, dann sind X und Y homologie-äquivalent und f erzeugt Isomorphismen der Homologiegruppen von X auf die von Y . — Die (einfachen) Beweise benutzen einen Satz von Kuratowski [Ann. Soc. Polonaise Math. 17, 118 (1938)] und Abbildungssätze von H. Hopf [J. reine angew. Math. 163, 71—88 (1930)]. *Burger* (Frankfurt a. M.).

Fet, A.: Der Homologiering des Raumes der geschlossenen, rektifizierbaren Kurven auf der Kugel. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 66, 347—350 (1949) [Russisch].

In der Morseschen Theorie der Variationsrechnung im Großen spielt der metrische Raum Ω der geschlossenen rektifizierbaren Kurven auf der n -Sphäre S^n eine wesentliche Rolle. Für $n = 2$ hat Morse die Bettischen Zahlen mod 2 von Ω bestimmt. Verf. berechnet ebenfalls für $n = 2$ die vollständige Struktur des Kohomologierings mod 2 von Ω , indem seine Multiplikationstafel explizit angegeben wird. Es ist jedoch aus der Arbeit nicht genau ersichtlich, in welchem Sinne die Kohomologietheorie von Ω gemeint ist. *Burger* (Frankfurt a. M.).

Fet, A.: Ganzzahlige Homologien des Raumes der geschlossenen Kurven auf der Sphäre. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 66, 569—570 (1949) [Russisch].

Für den Raum Ω der geschlossenen Kurven auf der 2-Sphäre werden die ganzzahligen Homologiegruppen berechnet. Sie sind in den geraden Dimensionen Nullgruppen, in den ungeraden Dimensionen direktes Produkt einer unendlichen zyklischen Gruppe und einer zyklischen Gruppe der Ordnung zwei. Dies ist das erste Beispiel eines Funktionenraumes mit Torsion. *Burger* (Frankfurt a. M.).

Borel, Armand et Jean-Pierre Serre: Impossibilité de fibrer un espace euclidien par des fibres compactes. C. r. Acad. Sci., Paris 230, 2258—2260 (1950).

Les AA. montrent comment la théorie d'homologie des espaces fibrés édiflée par J. Leray permet de démontrer simplement une hypothèse (voir le titre) aussi vieille que la théorie des espaces fibrés. Cette hypothèse n'a été vérifiée auparavant que dans des cas particuliers. *Reeb* (Strasbourg).

Ivanov, A. A.: Die Isotopie von Kompakten in Euklidischen Räumen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 71, 1021—1022 (1950) [Russisch].

Eine Deformation $\{f_t\}$ ($0 \leq t \leq 1$) der Identität f_0 des Raumes R auf sich heißt Isotopie von R , wenn jede Abbildung f_t eine topologische Abbildung von R auf sich ist. Die Mengen M und N von R heißen isotop in R , wenn es eine Isotopie $\{f_t\}$ von R gibt mit $f_1(M) = N$. Es wird ein Beweis des folgenden Satzes skizziert: Wenn M ein Kompaktum im n -dimensionalen Euklidischen Raum E^n ($n > 3$) ist, das in einem $(n-1)$ -dimensionalen Euklidischen Raum E^{n-1} liegt, so existiert ein zu M homöomorphes, aber nicht in E^n isotopes Kompaktum in E^n dann und nur dann, wenn M nicht-abzählbar ist. Beim Beweis wird die Konstruktion eines null-dimensionalen Kompaktums in E^n ($n > 3$) durchgeführt, dessen Komplementärraum eine nichttriviale Fundamentalgruppe hat. *Burger* (Frankfurt a. M.).

Klassische theoretische Physik.

● **Reports on Progress in Physics. Bd. 12 (1948—1949).** London: The Physical Society 1949. 381 p.

Der vorliegende Band einer etwa der deutschen Serie „Physik in regelmäßigen Berichten“ entsprechenden Reihe enthält Berichte vorwiegend experimenteller Natur über Massenspektrometrie (von H. G. Thode und R. B. Shields), Kernparamagnetismus (von B. V. Rollin), Phosphoreszenz (von G. F. J. Garlick), Kernversuche mit sehr energiereichen Röntgenstrahlen (von W. Bosley und J. D. Craggs), Linearbeschleunigungsanlagen (von D. W. Fry und W. Walkinshaw), Mechanische Eigenschaften von Gläsern (von G. O. Jones), Physik der tiefen Temperaturen, im speziellen Supraleitung und Erscheinungen beim Helium (von K. Mendelssohn), Wirkungsquerschnitte für langsame Neutronen (von M. Ross und J. S. Story). Besonderes theoretisches Interesse besitzen Berichte über: Spontane Schwankungen (von D. K. C. MacDonald), die statistische Theorie der Zustandsgleichung von Gasen unter besonderer Berücksichtigung der dabei auftretenden Quanteneffekte (von J. de Boer), Theorie der Metalloxydation (von Cabrera und N. F. Mott), Brucherscheinungen bei festen Körpern (von E. Orowan), Multipolstrahlung von Atomen (von A. Rubiniowicz) und schließlich über Zusammenstöße zwischen Atomen bzw. Molekülen (von H. S. Massey). *Sauter.*

● **Wagner, K. W.: Einführung in die Lehre von den Schwingungen und Wellen.** Wiesbaden: Dieterichsche Verlagsbuchhandlung 1947. XVI, 640 S. mit 288 Abb.: broschiert 34,— DM.

Ein reichhaltiges und dabei erfreulich klares Buch. Der Gedanke, die ganze Formenlehre der Schwingungen voranzunehmen, entlastet und erleichtert wesentlich die Darstellung der Entstehungsweisen der Schwingungen. Am besten wird ein Auszug aus dem Inhaltsverzeichnis einen Eindruck vermitteln: I. Lehre von den Schwingungsformen: Einfache und zusammengesetzte Schwingungen, Fouriersche Reihen, Fouriersche Integrale, Modulierte Schwingungen. II. Dynamik der Schwingungen: Einfache Schwingungsglieder, Gekoppelte Gebilde aus zwei Gliedern. Gekoppelte Gebilde mit einer beliebigen endlichen Zahl von Gliedern. III. Schwingungen und Wellen in kontinuierlichen Systemen: u. a. Wellen auf der Saite — Drehschwingungen — Luftschwingungen — Homogene elektrische Leitungen — Biegeschwingungen — Die kreisförmige Membran — Kugelstrahler höherer Ordnung. IV. Elektrische Wellen in der Ionosphäre. V. Schwingungsgebilde mit periodisch veränderlichen Elementen. VI. Nichtlineare Schwingungssysteme: u. a. Erzwungene Schwingungen und Resonanz — Frequenzvervielfachung — Selbsterregung von Schwingungen durch den Lichtbogen — Kippschwingungen — Frequenzteilung — Zieherscheinungen. — Es folgen 70 Seiten Anhänge über mathematische Einzelfragen, besonders ausführlich über Matrizenrechnung und Laplace-Transformation. (Verf. benutzt nicht die einfache Form der Laplace-Transformation, sondern die Nebenform, welche die Erinnerung an den Heaviside-Kalkül deutlicher zeigt.) Den Schluß bilden ein Namen- und ein Stichwortverzeichnis. Das Buch ist als Lehrbuch sehr zu empfehlen, wenn man eine geeignete Auswahl trifft, und ist auch als Nachschlagebuch wertvoll.

Bödewadt (Brunoy).

Infeld, Leopold: The factorization method and its application to differential equations in theoretical physics. Proc. Symposia appl. Math., Nr. 2 (Massachusetts Institute of Technology, July 29—31, 1948. Electromagnetic theory), 58—65 (1950).

Verf. berichtet über die Anwendung der „factorization method“ auf Differentialgleichungen zweiter Ordnung der mathematischen Physik. Ist die typische, etwa der Wellenmechanik entnommene Gleichung

$$(A) \quad \frac{d^2 y_m}{dx^2} + r(x, m) y_m + \lambda y_m = 0,$$

wo $m = 0, 1, 2, \dots$ und λ der Eigenwert ist, so hat man beim ersten Schritt dieser Methode die Gleichung A durch

$$(B) \quad \begin{aligned} (+H_{m+1})(-H_{m+1})y_m &= [\lambda - L(m+1)]y_m, \\ (-H_m)(+H_m)y_m &= [\lambda - L(m)]y_m \end{aligned}$$

zu ersetzen, wobei $\pm H_m = k(x, m) \pm d/dx$ ist. Es ist dabei in allen bekannten Fällen möglich, zu einem gegebenen $r(x, m)$ die $k(x, m)$ bzw. $L(m)$ anzugeben. Der zweite Schritt ist dann das Gleichungspaar

$$(C) \quad (-H_{m+1})y = [\lambda - L(m+1)]^{\frac{1}{2}}y_{m+1}, \quad (+H_{m+1})y_{m+1} = [\lambda - L(m+1)]^{\frac{1}{2}}y_m.$$

Es sind dies wirklich Rekursionsgleichungen, die es gestatten, die ganze Reihe der Funktionen y_m zu konstruieren, falls eine von ihnen bekannt ist. Es kommt bei dieser Methode auch nicht darauf an, die exakte Lösung zu bestimmen, als vielmehr die Verknüpfung der Lösungen untereinander. Hierdurch zeigt man:

$$\int (y_{m+1})^2 dx = \int (y_m)^2 dx,$$

womit die Normierung für jede Funktion der Reihe zuwege gebracht wird. Über die Technik dieser Methode hinausgehend meint Verf., daß man sich über die Theorie noch nicht im klaren ist. Er glaubt, daß ein gruppentheoretisches Moment verborgen sei, welches man zutage fördern sollte. *S. C. Kar (Calcutta).*

Sabatier, Germain: *Remarques sur le rôle de la température en analyse dimensionnelle.* *Rev. sci., Paris* **87**, 67—73 (1949).

Bei Anwendung des Ähnlichkeitsprinzips auf temperaturabhängige Probleme, beispielsweise Wärmeleitungsprobleme, erhält man einen tiefgehenderen Einblick in den speziellen physikalischen Vorgang, wenn man die Temperatur als selbständige Fundamentalgröße beibehält, als wenn man entsprechend der kinetischen Gastheorie die Temperatur als Energiegröße ausdrücken würde („Paradoxon von Rayleigh-Riabouchinsky“). Verf. zeigt an einem Wärmeleitungsbeispiel, daß die auf beide Arten, nämlich mit drei oder vier Fundamentalgrößen, erhaltenen Ergebnisse ineinander übergeführt werden können und das „Paradoxon“ dadurch zustande kommt, daß im einen Fall implizite Annahmen eingeführt werden. Hierzu leitet Verf. zunächst den formalen Mechanismus der Dimensionsanalyse ab, den er dann auch noch auf andere Probleme, wie z. B. den Wärmeübergang in strömenden Flüssigkeiten sowie auf Wärmestrahlungsprobleme anwendet. *Wuest (Göttingen).*

Moon, Parry and Domina Eberle Spencer: *The dimensions of physical concepts.* *Amer. J. Phys., Lancaster Pa.* **17**, 171—177 (1949).

Dimensionen bezeichnen nicht Einheiten sondern Begriffe. Physikalische Größen werden als Vektoren in einem affinen Raum beschrieben, der durch Einheitsvektoren, welche die gewählten Maßeinheiten von Länge, Zeit usw. darstellen, aufgespannt wird. Solche Vektoren werden Idonen genannt. *C. F. v. Weizsäcker.*

Majorana, Quirino: *Coesione, forze nucleari e legge di Newton.* *Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. 9*, 3—8 (1950).

Costa de Beauregard, O.: *Étude physique directe d'une expérience comportant une statistique sur le temps.* *C. r. Acad. Sci., Paris* **225**, 724—726 (1947).

Mechanik:

Reeb, Georges: *Sur les mouvements périodiques de certains systèmes mécaniques.* *C. r. Acad. Sci., Paris* **227**, 1331—1332 (1948).

M sei ein mechanisches System mit holonomen zeitunabhängigen Bedingungen. Der Konfigurationsraum von M sei eine geschlossene n -dimensionale Mannigfaltigkeit V_n . Auf M wirke erstens ein System von Kräften, welches eine zeitunabhängige Kraftfunktion $U(q_1, \dots, q_n)$ besitzt, und zweitens ein System von

Störungskräften, deren virtuelle Arbeit durch eine Linearform δW in den δq gegeben ist. δW sei eine Funktion von q, q', t und sei in t periodisch mit der Periode λ . Es sei $dW/dt < 0$, sofern nur $\|q'\| > m$ ist, worin m eine von q, q', t unabhängige Konstante bedeutet. Es ergibt sich unter Benutzung eines bekannten Fixpunktsatzes (Alexandroff-Hopf, Topologie, Berlin 1935, S. 542; dies. Zbl. 13, 49): Die algebraische Anzahl der periodischen Bewegungen von M mit der Periode λ ist gleich der Euler-Poincaréschen Charakteristik von V_n . *Rinow* (Greifswald).

Nagabushanam, K.: A generalization of the theorem of virial. *J. Indian math. Soc.*, II. S. 12, 117—120 (1948).

Verf. stellt für ein dynamisches System von n Freiheitsgraden ein Theorem auf, welches dem Virialtheorem in der statistischen Mechanik analog ist. Wenn man die $(2n + 1)$ -fache Mannigfaltigkeit von Zuständen des Systems von n Freiheitsgraden zusammen mit der Zeit betrachtet, entspricht dem Differentialquotienten nach der Zeit eine infinitesimale Transformation entlang einer „Trajektorie“. Das Theorem macht eine mathematische Aussage über solche infinitesimalen Transformationen als Funktion der Ortskoordinaten, wenn die Zeit ebenfalls als Funktion der Ortskoordinaten gegeben ist. Schließlich zeigt Verf., welche Spezialisierung von seinem Theorem zu jenem führt, das Aurel Wintner in seiner *Celestial Mechanics* aufgestellt hat. *Kofink* (Stuttgart).

Tzénoff, Iv.: Quelques formes nouvelles des équations générales du mouvement des systèmes matériels. *C. r. Acad. Bulgare Sci.* 2, Nr. 1, 13—16 (1949).

Die Arbeit enthält einen neuen Gedanken: es gelingt die Aufstellung der Bewegungsgleichungen durch Benutzung der beiden ersten totalen Ableitungen der kinetischen Energie. Es gibt sogar drei verschiedene Formen dieser Gleichungen, und es ist nicht ersichtlich, wie diese zusammenhängen und wie die Spezialisierung auf den holonomen Fall zustande kommt. *Hamel* (Landshut).

Pignedoli, Antonio: Ricerca di soluzioni particolari di un sistema anolonomo in base alla esistenza di integrali o relazioni invarianti. *Atti Sem. mat. fis. Univ., Modena* 1, 95—118 (1947).

L'A. introduce per le equazioni del moto di un sistema dinamico non olonomo una definizione di integrali o relazioni invarianti in involuzione e mostra come si possa determinare una famiglia di soluzioni particolari estendendo il metodo di Levi-Civita e Routh valido per i sistemi olonomi. *G. Lampariello* (Messina).

Agostinelli, Cataldo: Sull' applicabilità del metodo di Jacobi della meccanica analitica ai sistemi anolonomi. I. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur.*, VIII. S. 7, 93—95 (1949).

L'A. si é proposto di ricercare le condizioni in cui l'integrazione delle equazioni del moto di un sistema dinamico, le cui configurazioni si possono caratterizzare con n coordinate lagrangiane, soggetto ad $m < n$ vincoli non olonomi, si può ricondurre alla determinazione di una famiglia ∞^{n-m} di soluzioni di una conveniente equazione alle derivate parziali del 1° ordine e ad una successiva operazione analitica che introduce altre m costanti arbitrarie. — Il presente lavoro é un'introduzione alla nota in cui verranno stabilite le condizioni predette. *G. Lampariello* (Messina).

Agostinelli, Cataldo: Sull' applicabilità del metodo di Jacobi della meccanica analitica ai sistemi anolonomi. II. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur.*, VIII. S. 7, 96—99 (1949).

L'A. dimostra che, quando sono soddisfatte certe condizioni, la determinazione della soluzione generale delle equazioni del moto di un sistema dinamico con vincoli non olonomi si può conseguire ricercando una soluzione di un'equazione a derivate parziali del 1° ordine, dipendente da un certo numero di costanti arbitrarie e dalla successiva integrazione di un sistema di equazioni differenziali ordinarie del 1° ordine.

G. Lampariello (Messina).

Rubbert, Friedrich Karl: Zur Theorie des sphärischen Pendels. Z. Phys., Berlin 128, 56—71 (1950).

Ziel ist Ergänzung der klassischen Theorie namentlich mit Blick auf Näherungsmethoden. Aufstellung einer Differentialgleichung zweiter Ordnung mit quadratischem Glied für $\cos\theta - \cos\gamma$. Von hier aus ist natürlich der Übergang zu dem fast konischen Pendel sehr leicht, man braucht nur das quadratische Glied zu vernachlässigen.

Hamel (Landshut).

Gallissot, François: Sur l'origine du paradoxe de Painlevé dans les systèmes de points matériels ou de solides en mouvement avec frottement. C. r. Acad. Sci., Paris 230, 2148—2150 (1950).

Es werden notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß für ein System von Punkten, von denen jeder einseitig an eine Fläche gebunden sei, das Painlevésche Paradoxon der Reibung gilt. Die Bedingung ist sehr einfach: es muß mindestens eine linear-homogene Gleichung zwischen den Differentialen der Koordinaten bestehen. Der Beweis ist skizziert. Die bekannten Fälle ordnen sich unter. Hinweis darauf, daß das Paradoxon entweder durch Aufgabe der starren Bindung oder durch tangentialen Stoß vermieden werden kann.

Hamel.

Ludwig, Konrad: Der Massenpunkt mit konstanter Horizontalgeschwindigkeit auf dem beiderseits unbegrenzten elastisch gebetteten Geleis mit Reibung proportional der Vertikalgeschwindigkeit. Z. angew. Math. Mech. 30, 242—243 (1950).

• **Grammel, R.:** Der Kreisel. Seine Theorie und seine Anwendungen. Bd. I: Die Theorie des Kreisels. Zweite, neubearbeitete Aufl. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer-Verlag 1950. XI. 281 S., 137 Abb. RM 30.—, Ganzleinen DM 33.—.

Der vorliegende erste Band über die Theorie des Kreisels erscheint gegenüber der ersten Auflage in ziemlich neuem Gewand. Aus didaktischen Gründen hat Verf. die frühere Einteilung nach kräftefreiem Kreisel, Kreisel unter Zwang, schwerem Kreisel, wobei der symmetrische Kreisel nur als Sonderfall des unsymmetrischen Kreisels auftritt, durch eine andere Einteilung ersetzt, indem zunächst der symmetrische Kreisel (kräftefrei, geführt, gezwungen, der Schwere unterworfen) und danach der unsymmetrische Kreisel (kräftefrei oder schwer) behandelt wird. Nach Ansicht des Verf. wird es auf diese Weise möglich, allmählich vom Einfachen zum Schwierigeren aufzusteigen. — Der erste Abschnitt enthält die Grundlagen der Vektoralgebra und der Mechanik (Kinematik, Kinetik, Impulssätze und Energie, Stoß und Drehstoß) sowie des Trägheitstensors starrer Körper. Im zweiten Abschnitt wird der symmetrische Kreisel behandelt (kräftefreier symmetrischer Kreisel, geführte Bewegung des symmetrischen Kreisels, symmetrischer Kreisel unter Zwang und Stoß, schwerer symmetrischer Kreisel, Einfluß der Reibung beim kräftefreien sowie beim verschieden aufgehängten oder gelagerten Kreisel). Der dritte Abschnitt bringt die Drehbewegungen des unsymmetrischen Kreisels, wobei wieder die Unterscheidung nach kräftefrei und schwer gemacht wird, je nachdem der Schwerpunkt mit dem Stützpunkt zusammenfällt oder nicht. Die Bewegung des kräftefreien, unsymmetrischen Kreisels wird anschaulich und formelmäßig vollständig beschrieben und in der Darstellung des Verf. zu einem der reizvollsten Abschnitte des ganzen Buches gestaltet. In diesem Abschnitt sind auch die Untersuchungen über die Staudeschen Drehungen (als der einzigen exakt bekannten Bewegungen des unsymmetrischen schweren Kreisels) aufgenommen sowie die Nachbarbewegungen der stabilen unter diesen Drehungen [O. Staudé, J. reine angew. Math. 113, 318 (1894)]. — Im vierten und letzten Abschnitt sind einige Probleme behandelt, die teils mit Rücksicht auf ihre Untersuchungen, teils mit Bezug auf die im zweiten Bande folgenden Anwendungen des Kreisels ausgewählt sind. Dabei wird der Begriff des Kreisels etwas erweitert und einige Körper untersucht, die diesem erweiterten Begriff zugeordnet werden können, nämlich der Spielkreisel, der Gyrostat, das rollende Rad und die rollende Kugel. Hierbei kommt die Methode der generalisierten Koordinaten nach Lagrange zur Anwendung, indem die Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art für den in Frage kommenden Fall abgeleitet werden. Insbesondere ist in diesem Abschnitt die allgemeine Theorie der gyroskopischen Systeme und gyroskopischen Stabilisierung dargestellt. Wie Verf. bemerkt, ist die Kenntnis dieser Theorie für das Verständnis der Anwendungen des Kreisels nicht unbedingt erforderlich, ausgenommen die Stabilitätsbedingungen von Ch. Hermite [J. reine angew. Math. 52, 39 (1850)] und A. Hurwitz [Math. Ann. 46, 273 (1895)]. — In einem wenige Seiten umfassenden Anhang wird eine Darstellung des schweren symmetrischen und des kräftefreien unsymmetrischen Kreisels mit Hilfe der Jacobischen Thetafunktionen gegeben, „um dem Leser an Hand dieser beiden Beispiele jenes wertvolle und mächtige Hilfsmittel etwas näher zu bringen, das trotz seines ehrwürdigen Alters bei Nichtmathematikern, die die Mathematik anwenden müssen, viel zu wenig bekannt ist“. — Das Buch ist trotz seines

sachlich nicht immer leichten Inhalts sehr klar geschrieben, ebenso wie die vielen guten Figuren zum besseren Verständnis beitragen. Die Übersicht wird für den Leser auch dadurch erleichtert, daß die Ergebnisse der Theorie jeweils in prägnanten Sätzen zusammengefaßt werden.

Gran Olsson (Trondheim).

Agostinelli, Cataldo: Sul moto intorno a un punto fisso di un corpo rigido pesante il cui baricentro appartiene all'asse di uno dei piani ciclici dell'ellissoide d'inerzia. Ann. Mat. pura appl., Bologna, IV. S. 30, 211—224 (1949).

Un corpo rigido pesante fissato per un punto O sia riferito ad un sistema di assi solidali $Oxyz$ scelti nel modo seguente: l'asse Oz sia l'asse di uno dei piani ciclici dell'ellissoide d'inerzia relativo al punto O e l'asse Ox appartenga al piano principale d'inerzia che contiene Oz . Si fa l'ipotesi che il baricentro del corpo sia su Oz . — L'A. già in un precedente lavoro (questo Zbl. 35, 112) ha stabilito le equazioni del moto con quella scelta degli assi introducendo come variabile ausiliaria una certa combinazione lineare delle componenti p, q, r della velocità angolare, che risulta proporzionale al momento cinetico del corpo rispetto all'asse baricentrale Oz . Nello stesso lavoro l'A. ha dimostrato che l'integrazione delle equazioni dinamiche può essere ricondotta a determinare q^2 ed r quali funzioni di s mediante l'integrazione di due equazioni differenziali del 2° ordine. Dall'analisi di queste risulta che esistono particolari moti del corpo (asimmetrico) nei quali r è costante e $q^2 = r^2 - p^2$. Tali moti sono le precessioni regolari di Grioli. Nessun altro moto esiste per il quale q^2 ed r siano polinomi in s . — In questo lavoro l'A. determina q^2 ed r , nonché i coseni direttori della verticale discendente mediante serie di potenze di s . Tali espressioni involgono cinque costanti arbitrarie compresa la costante temporale. — In casi particolari le serie si riducono a polinomi: se, per es., sono soddisfatte certe relazioni fra le costanti di struttura del corpo è possibile caratterizzare una soluzione in cui r è funzione lineare di s . G. Lampariello (Messina).

Poritsky, Hillel: The billiard ball problem on a table with a convex boundary. — An illustrative dynamical problem. I. The invariant integral. Integrability. Ann. Math., Princeton, II. S. 51, 446—470 (1950).

L'A. fait une étude géométrique directe, par des méthodes élémentaires, du problème classique (voir le titre) de G. D. Birkhoff. Après avoir établi diverses formules pour l'invariant intégral attaché au système dynamique envisagé, l'A. étudie les enveloppes des familles à 1 paramètre de segments de trajectoires. Le but du mémoire est l'étude approfondie des cas „intégrables“ et la mise en évidence de la position privilégiée de la table elliptique. L'A. fait également quelques remarques sur la transitivité. Reeb (Strasbourg).

● **Schuler, M.:** Mechanische Schwingungslehre. Teil I: Einfache Schwinger. (Bücher der Mathematik und Naturwissenschaften.) Wolfenbüttel und Hannover: Wolfenbütteler Verlagsanstalt 1949. 168 S. mit 123 Bildern. DM 6.—.

Der vorliegende Band ist aus einer Reihe von Vorlesungen des Verf. an der Universität Göttingen entstanden und soll nicht nur dem Studierenden als Lehrbuch, sondern auch dem in der Praxis stehenden Physiker als Nachschlagebuch dienen, wobei nur verhältnismäßig geringe mathematische Kenntnisse vorausgesetzt werden. Der erste Abschnitt des Büchleins behandelt die freien, ungedämpften Schwingungen von Massenpunkten und starren Körpern, wobei über die elementaren Erörterungen hinaus hauptsächlich Fragen behandelt werden, welche mit dem Antrieb und der Ganggenauigkeit der Uhren in Zusammenhang stehen. Hierbei bringt Verf., der als Erfinder der nach ihm benannten photoelektrischen Uhr auf diesem Gebiete Spezialist ist, interessante Einzelheiten. Im zweiten Abschnitt werden zunächst die elementaren Gesetze der freien gedämpften Schwingungen bei geschwindigkeitsproportionaler Dämpfung gebracht. Des weiteren wird der Fall der Dämpfung durch Reibungskräfte berücksichtigt, die entweder konstant sind oder proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit anwachsen. Auch elektrische Dämpfung wird erörtert. Der dritte Abschnitt bringt schließlich die erzwungenen Schwingungen, wobei besonders das Anfahren eines Schwingers aus der Ruhelage heraus für Dämpfung verschiedener Art und Größe an Hand sorgfältig ausgeführter Diagramme diskutiert wird. So ist das Büchlein inhaltlich mehr auf Fragen der angewandten Physik zugeschnitten und wird insbesondere dem technischen Physiker von Nutzen sein, wenn auch höhere theoretische Gesichtspunkte, wie sie etwa die Gleichungen von Lagrange, Hamilton und Jacobi vermitteln, nicht berührt werden.

H. Neuber (Dresden).

Flügge-Lotz, I. und K. Klotter: Über Bewegungen eines Schwingers unter dem Einfluß von Schwarz-Weiß-Regelungen. I. Bewegungen eines Schwingers von einem Freiheitsgrad; Regelung mit Stellungszuordnung ohne Schaltverschiebungen. Z. angew. Math. Mech. **28**, 317—337 (1948).

Ein Schwingungssystem $\ddot{\varphi} + 2D\omega\dot{\varphi} + \omega^2\varphi = K$ steht unter dem Einflusse der Regelkraft $K = \mp b \operatorname{sgn} F$, die also bei dieser „idealen“ Regelung ihr Zeichen genau gleichzeitig mit der Regelungsfunktion $F = \varphi + \rho\dot{\varphi}$ wechselt. Zu jedem Schaltpunkt $F = 0$ gehören die Schaltwerte $\varphi_0, \dot{\varphi}_0$. Zwischen zwei Schaltpunkten ist die Bewegung durch elementare Gleichungen bestimmt und läßt sich in der „Phasenebene“ $(\dot{\varphi}/\omega, \varphi)$ unter Verwendung schräger Achsen durch Bogen logarithmischer Spiralen konstanter Neigung darstellen, deren Grenzpunkte in $\dot{\varphi}/\omega = \mp b/\omega^2$ liegen, während alle Schaltpunkte auf einer Geraden durch den Nullpunkt (der Schaltgeraden) zu finden sind. Von einem gegebenen Ausgangspunkt aus läßt sich der Bewegungsablauf so schnell konstruieren. Überblicksmäßig läßt sich die Bewegung auch durch die Folgen ihrer Schaltpunkte in dem rechtwinkligen System der „Schaltebene“ $(\varphi_0/\omega, \varphi_0)$ angeben. Besonderheiten des Bewegungsablaufes, wie das Zurruhekommen der Schaltung (schließlich festes Zeichen von F), undefiniertes Verhalten der Regelung, Randpunkte der Bewegung, werden mittels dieser Darstellungen untersucht, und es werden auch die zugehörigen Aufteilungen der Schaltebene für die zugehörigen Ausgangspunkte der Bewegung angegeben. Ebenso werden die Bedingungen für ein Aufschaukeln der Bewegung, Übergang zu periodischen Bewegungen, langsames oder schnelleres Abklingen im Vergleich zur unregelmäßigen Bewegung hinsichtlich der Ausgangswerte und einer zweckmäßigen Wahl der Regelungsparameter b, ρ sowie des Vorzeichens von K/F behandelt.

Bödewadt (Brunoy).

Päslar, M.: Resonanzkurven von erzwungenen Schwingungen, erregt durch Störungen mit frequenzabhängiger Amplitude. Ann. Phys., VI. F. **4**, 1—13 (1949).

Bei der Schwingungsgleichung

$$\frac{d^2x_n}{dt^2} + 2\delta\frac{dx_n}{dt} + \omega_0^2x_n = k_n\omega^n e^{i\omega t}$$

(Auslenkung x_n , Zeit t , Konstanten $\delta, \omega_0, k_n, \omega$) eines Schwingungssystems, auf das eine periodische Störung wirkt, deren Amplitude der n -ten Potenz der Erregerfrequenz ω proportional ist, wird der Verlauf der Resonanzkurven $\sigma_n(\omega) = \bar{x}_n(\omega)/x_n$ für $n = 0, 1, 2, 3, 4$ mit der Federkonstante $c = m\omega_0^2$ als Parameter diskutiert, während sonst öfter die Dämpfung δ als Parameter gewählt wird. $\bar{x}_n(\omega)$ ist dabei die Schwingungsamplitude für den stationären Zustand. Die Kurvenscharen überdecken in der σ_n - ω -Ebene einen Bereich, der von einer Enveloppe begrenzt wird, die in einem doppelt-logarithmischen Koordinatensystem stets eine Gerade der Steigung $n - 1$ ist (also, im Falle $n = 1$ eine horizontale Gerade). Zahlreiche Abbildungen erläutern den Sachverhalt.

Collatz (Hannover).

Nardini, Renato: Sulle vibrazioni quasi-armoniche di un sistema dissipativo con elasticità periodica. Boll. Un. mat. Ital., III. S. **4**, 370—373 (1949).

In einer vorübergehenden Note [Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. **6**, 603—608 (1949)] hat Verf. die Bewegung eines dissipativen Systems mit einem Freiheitsgrad untersucht, das einer mit der Zeit veränderlichen und mit T periodischen elastischen Kraft unterworfen ist: seine Bewegungsgleichung lautet:

$$y'' + 2cy' + \omega^2(t)y = 0, \quad 0 < c < m, \quad \omega(t + T) = \omega(t) > 0.$$

Damit jedes Integral dieser Gleichung und seine Zeitableitung für $t \rightarrow \infty$ gegen Null strebt, ist hinreichend, daß T größer ist als ein gewisser, von den relativen Maximis und Minimis von $\omega(t)$ im Intervall $t_0 \leq t \leq t_0 + T$, die in endlicher Anzahl angenommen werden, abhängiger Ausdruck ist. In dieser Note wird dieses Ergebnis

auf den Fall $c \geq m$ übertragen, während die anderen Voraussetzungen beibehalten werden. *Th. Pöschl (Karlsruhe).*

Pearson, D. H.: The displacement-frequency characteristic of elastically coupled mechanical systems with two degrees of freedom. *Proc. phys. Soc. London, B* 62. 579—588 (1949).

Verf. untersucht ein Schwingssystem von zwei Freiheitsgraden, von dem die erste Masse m_1 durch Feder (elastische Rückstellkraft) mit der Konstanten k_1 und (geschwindigkeitsproportionalem) Dämpfer mit der Konstanten c_1 mit dem Ruhssystem verbunden ist, während die zweite Masse m_2 nur durch eine weitere Feder (k_2) an m_1 , hingegen durch einen weiteren Dämpfer (c_2) direkt an das Ruhssystem angeschlossen ist. [Man vergleiche hierzu den Abschnitt: „Gedämpfte mechanische Schwingungsdämpfer“ in I. P. Den Hartog, *Mechanische Schwingungen*, deutsche Bearbeitung von G. Mesmer (1936), S. 91—104, wo ein analoges Schwingssystem mit zwei Freiheitsgraden untersucht wird.] — Stellt man nun die Auslenkung x_2 der Masse m_2 als Funktion von $\beta = \omega/\omega_1$ mit ω als Frequenz der an m_1 angreifenden periodischen Erregerkraft dar, so ergibt sich eine Kurve, die im positiven Bereich zwei Maxima und ein Minimum aufweist. Die Einengung dieser Extremwerte in einen schmalen Streifen, wie er einer vorgeschriebenen kleinen Amplitudenschwankung x_2 von m_2 entspricht, gibt dann von Null bis zum Austrittspunkt λ_8 jener Kurve aus dem erwähnten Streifen jenen Frequenzbereich der Erregerfrequenz ω an, für den sich die Amplitude von x_2 nahezu unabhängig von ω erweist. Verf. zeigt in Schaubildern, daß dann sowohl λ_8 als auch $\delta = \omega_2/\omega_1$ (mit $\omega_1 = \sqrt{k_1/m_1}$, $\omega_2 = \sqrt{k_2/m_2}$ als Eigenkreisfrequenzen der beiden ungedämpften Schwingssysteme) in Abhängigkeit von $\alpha_2 = c_2/2m_2\omega_2$ reelle Äste nur für die Intervalle $0 \leq \alpha_2 \leq 0,2$ und $0,65 \leq \alpha_2 \leq 1$ aufweisen (von denen vornehmlich das erste praktische Bedeutung besitzt), während dem Bereich $0,2 \leq \alpha_2 \leq 0,65$ „komplexe Äste“ der genannten Kurven entsprechen. Der Phasenwinkel steigt im Bereich $0 \leq \beta \leq 1$ nahezu linear an. — Die vorliegende Theorie findet praktische Anwendung vor allem bei Galvanometern mit auf dem Schwinger elastisch befestigtem Spiegel und auch (nach einigen Modifikationen) bei Beschleunigungsmessern; sie kann aber auch auf analog geschaltete elektrische Schwingkreise, wie Verf. zeigt, angewendet werden. Bemerkenswert ist das Ergebnis, daß für eine vorgegebene Empfindlichkeit der Frequenzbereich, für welchen die Amplitude von x_2 nahezu unabhängig von β ist, beim System mit zwei Freiheitsgraden fast doppelt so groß ist, wie bei einem geeigneten Vergleichssystem mit nur einem Freiheitsgrad und daß umgekehrt für einen gegebenen Unabhängigkeitsbereich die Empfindlichkeit des ersteren nahezu viermal so groß ist, wie die des letzteren. *Karas (Darmstadt).*

Soroka, Walter W.: Free periodic motions of an undamped two-degree-of-freedom oscillatory system with nonlinear unsymmetrical elasticity. *J. appl. Mech.*, New York 17, 185—190 (1950).

Es werden Drehschwingungen untersucht, wie sie in Triebwerken von Luftfahrzeugen infolge der Torsionsnachgiebigkeit der Propellerwelle auftreten können. Außer den Drehmassen von Motor und Lader, sowie den Federkonstanten der einzelnen Wellenstücke wird noch eine Zusatzfeder berücksichtigt, welche jeweils bei Erreichen eines Grenzbetrages des Drillwinkels in Tätigkeit tritt. Verf. zeigt, wie sich die so entstehenden nicht-linearen Schwingungen durch Aneinandersetzen linearer Differentialgleichungen bequem lösen lassen. *H. Neuber (Dresden).*

Kazakevič, V. V.: Mehrfache Systeme und die einfachsten dynamischen Uhrenmodelle. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. S. 74, 665—668 (1950) [Russisch].

Agostinelli, Cataldo: Interpretazione elettrodinamica della legge di attrazione universale e nuova spiegazione dello spostamento del perielio di Mercurio. *Atti Sem. mat. fis. Univ.*, Modena 1, 148—164 (1947).

L'A. si propone di studiare il moto di un punto materiale, detto pianeta, nel campo di forza di un corpo rotante, detto sole, nell'ipotesi, non avente alcun fondamento fisico, che la legge di forza sia quella elettrodinamica di Weber, ove si sostituiscono le masse alle cariche elettriche. *G. Lampariello (Messina).*

Strassl, Hans: Nomogramme zur Auflösung der Keplerschen Gleichung. *Astron. Nachr.* 279, 25—43 (1950).

Elastizität. Plastizität:

Vekua, I. N.: Einige grundlegende Fragen der Theorie einer dünnen sphärischen Schale. *Priklad. Mat. Mech.*, Moskva 11, 499—516 (1947) [Russisch].

Es wird die Integration der Differentialgleichungen des elastischen Gleichgewichtes von dünnen sphärischen Schalen untersucht. Ausgehend von den Schalengleichungen in einem isothermen Koordinatennetz wird mit Hilfe einer komplexen Darstellung dieser Gleichungen gezeigt, daß die Komponenten des Verschiebungsvektors der Schalenmittelfläche und der Schnittkräfte durch vier beliebige holomorphe Funktionen ausgedrückt werden können. Diese Methode wird am Beispiel einer Kugelkalotte mit eingespanntem Rand erläutert. Zum Schluß werden für ein flaches Schalensegment vereinfachte Gleichungen hergeleitet, die mit den schon früher von Vlasow [Priklad. Mat. Mech., Moskva 8, 109—140 (1944)] und E. Reissner [J. Math. Phys., Massachusetts 25, Nr. 1 (1946)] gefundenen übereinstimmen.

Kromm (Berlin).

Vekua, I. N.: Zur Theorie der dünnen, flachen, elastischen Schalen. Priklad. Mat. Mech., Moskva 12, 69—74 (1948) [Russisch].

Das von Vlasow aufgestellte System von zwei gekoppelten Differentialgleichungen vierter Ordnung für eine flache Schale (s. vorsteh. Referat) wird hier mit Hilfe einer komplexen Funktion $V = w + i\delta^{-2}\sqrt{12(1-\nu^2)}\Phi$ (w = Normalverschiebung, Φ = Spannungsfunktion, δ = Schalendicke) durch eine komplexe Differentialgleichung vierter Ordnung ersetzt. Nach Einführen eines isothermischen Koordinatennetzes ξ, η und der komplexen Veränderlichen $z = \xi + i\eta, \bar{z} = \xi - i\eta$ und nach einer Integration über z und \bar{z} wird diese komplexe Differentialgleichung auf eine komplexe Integralgleichung vom Volterratyp zurückgeführt. Gesondert wurden die Fälle einer flachen Kugelkalottenschale und einer flachen zylindrischen Schale untersucht.

Kromm (Berlin).

Ambareumian, S. A.: Zur Berechnung flacher Schalen. Priklad. Mat. Mech., Moskva 11, 527—532 (1947) [Russisch].

In einer früheren Arbeit von Vlasow [Priklad. Mat. Mech., Moskva, 8, 109—140 (1944)] wurde das Problem einer flachen, dünnen Schale mit nicht verschwindender Gaußscher Krümmung mit Hilfe einer Spannungsfunktion und unter Vernachlässigung kleiner Größen auf ein System von zwei gekoppelten Differentialgleichungen vierter Ordnung für die Normalverschiebung w und die Spannungsfunktion Φ zurückgeführt. Durch Einführen einer Hilfsfunktion werden diese Gleichungen hier in einer einzigen Differentialgleichung achter Ordnung zusammengefaßt und noch weiter vereinfacht, indem von der Tatsache, daß die Koeffizienten der ersten quadratischen Form bei einer flachen Schale nur wenig veränderlich sind, Gebrauch gemacht wurde. Für den Sonderfall einer momentenfrei gelagerten Schale mit rechteckigem Grundriß und mit einer Normalbelastung läßt sich die Lösung dieser Gleichung in Form einer doppelten Fourierreihe darstellen, deren Koeffizienten mit Hilfe einer Zerlegung der äußeren Last in eine entsprechende Reihe bestimmt werden können. Für eine Belastung durch eine Einzellast und durch eine gleichmäßig verteilte Last werden die Endergebnisse für die Normalverschiebungen und die Schnittkräfte mitgeteilt.

Kromm (Berlin).

Reissner, Eric: Note on the membrane theory of shells of revolution. J. Math. Phys., Massachusetts 26, 290—293 (1948).

A. Pucher [Beton und Eisen 33, 298 (1935); V. Int. Congr. Angew. Mech., Cambridge, 134 (1938); Internat. Verein. für Brückenbau und Hochbau 5, 275 (1938)] and P. Nemenyi [Byggningsstatiska Meddelelser (1936); Proc. nat. Acad. Sci. USA 29, 159 (1943)] have suggested the use of stress functions in treating problems without axial symmetry in the linear membrane theory of thin shells. This note establishes the connection between these two stress functions and offers a slight generalization of the one due to Nemenyi. The au. concludes that Nemenyi's stress function is preferable because the differential equation is simpler and because the stresses depend on first derivatives of the stress function. In Pucher's solution the stresses involve second derivatives.

M. P. White (Amherst/Mass.).

Darevskij, V. M.: Zur Frage der Wirkung gewisser Belastungen auf eine zylindrische Schale. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 75, 169—172 (1950) [Russisch].

Münz, H.: Zur Berechnung schwach gewölbter kreissymmetrischer Platten. Z. angew. Math. Mech. 30, 235 (1950).

Buell, E. L.: On the distribution of plane stress in a semi-infinite plate with partially stiffened edge. J. Math. Phys., Massachusetts 26, 223—233 (1948).

The au. treats the problem of a semi-infinite thin plate along the free edge of which is attached a stiffener-rod extending to infinity in one direction. On the exposed end of the stiffener there acts a force which is parallel to it. The non-uniform boundary for the Airy stress function for the plate is transformed into a boundary value problem for the unit circle. A solution of this is found in the form of a Fourier series whose coefficients satisfy an infinite system of linear equations in an infinite number of unknowns. These are solved approximately for the first few coefficients from which are calculated the stresses near the edge of the plate. *M. P. White.*

Koepeke, W.: Zur Ermittlung der Einflußflächen und inneren Kräfte umfangsgelagerter Rechteckplatten. Ingenieur-Arch. 18, 106—138 (1950).

E. Bittner [„Momententafeln und Einflußflächen für kreuzweise bewehrte Eisenbetonplatten“, Wien 1948] and A. Pucher [Reihe des Deutsch. Ausschusses für Stahlbeton. Berlin 1938; Ing. Archiv 12, 76—100 (1941); dies. Zbl. 26, 163] have proposed methods of finding influence surfaces for bending moment, deflection, etc. at a point of a rectangular plate under normal loads and supported on all edges. The influence surface is found from the fact that it is identical with the deflection surface of the same plate that would be produced by a concentrated loading at the point in question, the nature of the loading depending on the nature of the quantity whose influence surface is desired. It is therefore necessary to find the deflection shapes caused by various types of singularities. This is done by a superposition process — first solving the non-homogeneous plate equation for the given singularity without regard to boundary conditions, then adding solutions of the homogeneous equation to satisfy conditions on all four boundaries. The calculations involved are complicated and tedious; the au. furnishes tabulations of functions and outlines their use, whereby the labor of calculation is greatly reduced. *White.*

Nash, W. A.: Bending of an elliptical plate by edge loading. J. appl. Mech., New York 17, 269—274 (1950).

Schade, Th.: Neuartige Behandlung der Poissonschen und der inhomogenen Bipotentialgleichung bei rechteckigen Bereichen mit Anwendung auf Probleme der Torsion und der Plattenbiegung. Z. angew. Math. Mech. 30, 243—244 (1950).

Cicala, Placido: Sul comportamento elastico di una parete sottile quasi cilindrica. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. 7, 99—103 (1949).

L'A. considera una lastra sottile la cui superficie media é atteggiata a configurazione piana mediante applicazione di forze convenienti al contorno; inoltre agisce sulla lastra una pressione normale funzione del generico punto x, y della lastra stessa riferita ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali. Allora le tensioni $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ sono deducibili da una funzione $f'(x, y)$ mediante le formule $\sigma_x = \partial^2 f' / \partial y^2, \sigma_y = \partial^2 f' / \partial x^2, \tau_{xy} = -\partial^2 f' / \partial x \partial y$. Si immagini ora che la superficie media della lastra per effetto di una distribuzione nuova di pressioni venga atteggiata ad una configurazione possima ad un cilindro circolare di un determinato raggio R , di guisa che le distanze dei suoi punti da una certa retta differiscano da R per una quantità w ovunque piccola come lo spessore della lastra. La deformazione sia tale che le coordinate x, y si possano riguardare sul cilindro quali coordinate assiale e circonferenziale. Le nuove tensioni derivano da una funzione $f = f' + f''$ ed allora valgono per w ed f'' due equazioni a derivate parziali del 4° ordine. — Lo scopo della nota é la risoluzione approssimata di un problema al contorno che si pone per esse onde analizzare il comportamento di un pannello cilindrico compresso secondo le generatrici.

G. Lampariello (Messina).

Ziegler, Hans und Alfred Huber: Zur Knickung der gedrückten und tordierten Schraubenfeder. *Z. angew. Math. Phys.*, Basel **1**, 189—195 (1950).

The authors discuss the stability of a helical spring under simultaneous compression and torsion. They generalize the results of J. A. Haringx for springs of round wire [*Proc. Akad. Wet.*, Amsterdam **45**, 533 and 650 (1942); *Philips Res. Reports* **3**, 401 (1948) and **4**, 49 (1949)] to springs made of wire of other cross-sections. They show that for certain cases the critical compression is raised by increasing the torque and the critical torque by increasing the compression. *M. P. White.*

Kammerer, Albert: Les écarts à la loi de Hooke et le domaine de stabilité. *C. r. Acad. Sci.*, Paris **231**, 681—683 (1950).

Swida, W.: Über die elastisch-plastischen Formänderungen der Platte. *Z. angew. Math. Mech.* **30**, 246—247 (1950).

Hodge jr., P. G. and G. N. White: A quantitative comparison of flow and deformation theories of plasticity. *J. appl. Mech.*, New York **17**, 180—184 (1950).

Ein tordierter Hohlzylinder bei teilweiser Plastizierung wird nach den Theorien von Prandl-Reuß und Hencky mit Anwendung der Misesschen Fließbedingung und Berücksichtigung der Kompressibilität untersucht. Beide Rechnungsarten unterscheiden sich weniger in ihren Ergebnissen, als hinsichtlich des Zeitaufwandes. Andere Arbeiten über dasselbe Problem werden diskutiert. *H. Neuber (Dresden).*

Pastori, Maria: Velocità di avanzamento in un mezzo anisotropo ed invarianti del tensore elastico. *Ann. Mat. pura appl.*, Bologna, IV. S. **30**, 241—248 (1949).

L'A. considera le deformazioni infinitesime di un mezzo elastico anisotropo e ricerca il significato fisico di alcuni invarianti intrinseci del tensore elastico. Stabilito che per ogni punto del mezzo esistono almeno tre direzioni (principali) due a due ortogonali, tali che sia stazionaria la somma dei quadrati delle velocità di avanzamento corrispondenti alle superficie d'onda le cui normali hanno quelle direzioni, si dimostra che gli invarianti intrinseci considerati si ottengono tutti combinando opportunamente le somme dei quadrati delle velocità relative a ciascuna direzione principale. *G. Lampariello (Messina).*

Pignedoli, Antonio: Sulle vibrazioni di una piastra circolare sollecitata al contorno da una pressione radiale pulsante. *Atti Sem. mat. fis. Univ.*, Modena **2**, 3—19 (1948).

Sia una piastra omogenea e di spessore costante a forma di corona circolare, incastrata lungo la circonferenza interna e sollecitata lungo quella esterna da una pressione radiale pulsante. — L'A. studia le vibrazioni trasversali della piastra nel caso che le forze d'inerzia siano trascurabili rispetto alle forze elastiche e che la pressione pulsante sia esprimibile con una serie di Fourier di soli seni; caratterizza le vibrazioni proprie della piastra in termini delle dimensioni di questa, delle costanti elastiche e del termine costante dello sviluppo in serie della pressione radiale. — L'A. ricerca ancora le condizioni di risonanza fra le vibrazioni proprie e quelle determinate dalla pulsazione della pressione nonché le corrispondenti pressioni critiche. *G. Lampariello (Messina).*

Agostinelli, Cataldo: Sulla determinazione degli autovalori nel problema delle vibrazioni di una membrana con contorno epicycloidale fisso. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend.*, Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. **7**, 316—320 (1950).

L'A. considera l'equazione delle vibrazioni di una membrana piana a contorno epicycloidale fissato e scrive l'equazione che definisce, nell'approssimazione di ordine generico, gli autovalori del problema. *G. Lampariello (Messina).*

Sauter, Fritz: Der elastische Halbraum bei einer mechanischen Beeinflussung seiner Oberfläche. (Zweidimensionales Problem.) *Z. angew. Math. Mech.* **30**, 203—215 (1950).

Verf. betrachtet den von der Ebene $z = 0$ begrenzten elastischen Halbraum und untersucht die Wirkung, die eine Beanspruchung der Oberfläche durch eine vorgegebene Normalspannung $\sigma(x, t)$ und eine Schubspannung $\tau(x, t)$ im Medium

hervorrufft (ebenes Problem). Wie Versuche zeigen, entstehen hierbei, im Querschnitt betrachtet, drei verschiedene Arten von Stoßwellenfronten, nämlich zwei halbkreisförmige konzentrische Stoßfronten und zwischen diesen zwei geradlinige Schubwellenfronten, die von den Schnittpunkten A, A' des großen Halbkreises mit der Oberfläche, mit letzterer einen festen Winkel bildend, ausgehen und den kleineren Halbkreis berühren. Dieser Vorgang wird vom Verf. mathematisch gefaßt und besteht in der Aufgabe, eine Lösung der Grundgleichungen der Elastizitätstheorie zu finden, für die bei $z = 0$ $\sigma_{zz} = \sigma(x, t)$, $\sigma_{xz} = \tau(x, t)$ gilt und bei der sich die Störung ins Innere des Mediums fortpflanzt. Die beiden Komponenten s_x und s_z des diese Aufgabe lösenden Verschiebungsvektors können in der (gemeinsamen) Gestalt

$$s_{\{x\}} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \int_{-\infty}^{+\infty} dt' [\sigma(x', t') S_{\{x\}}(x - x', z, t - t', 1, 0) + \tau(x', t') S_{\{x\}}(x - x', z, t - t', 0, 1)]$$

geschrieben werden, wobei die $S_{\{x\}}(x, z, t, \sigma_1, \tau_1)$ Einflußfunktionen darstellen, die als Verschiebungskomponenten bei zeitlich und räumlich eng begrenzter Oberflächenbeanspruchung gedeutet werden können. In Anlehnung an eine vorhergehende analoge Fragestellung beim flüssigen Halbraum (dies. Zbl. 37, 109) werden die durch uneigentliche Doppelintegrale gegebenen Funktionen S_x und S_z geschlossen berechnet, wobei sich je nach der Lage von (x, z) zu den Stoßfronten drei verschiedene Darstellungsarten ergeben. Diese Formeln werden dann hinsichtlich der Bewegung der Oberfläche, des dort vorhandenen Spannungszustandes und hinsichtlich der Deformation in der Nähe der „Ecken“ A, A' und in der Nähe der Stoßwellenfronten ausführlich diskutiert.

Maruhn (Dresden).

Haag, Jules: Sur le coefficient de restitution dans la théorie des chocs. C. r. Acad. Sci., Paris 231, 257—259 (1950).

Die Auffassung, daß beim Auftreffen einer Masse auf ein Hindernis das Verhältnis der Geschwindigkeit vor und nach dem Stoß wesentlich von der Anfangsgeschwindigkeit abhängt, wird durch solche Hypothesen über den Berührungsvorgang bestätigt, welche diesen auf eine gewöhnliche, geschwindigkeitsproportional gedämpfte Schwingung zurückführen.

H. Neuber (Dresden).

Krall, Giulio: Dinamica ed Aerodinamica dei fili. III. Problemi non lineari delle vibrazioni visibili. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. 5, 197—203 (1948).

L'A. prosegue in questo lavoro le ricerche intorno alle vibrazioni dei fili conduttori di un elettrodotto e di quelle prodotte dalle scie vorticosi di Kármán che già furono oggetto di due note lincee (cfr. G. Krall, questo Zbl. 32, 88). Egli considera dapprima le oscillazioni finite in assenza di resistenza e stabilisce l'equazione dinamica fondamentale applicando il principio di Hamilton, ricerca particolari soluzioni periodiche sincrone alle azioni esterne nel caso che queste siano rappresentabili mediante il prodotto del seno di una variabile posizionale per il seno di una variabile proporzionale al tempo (perturbazione armonica). Quando nell'equazione dinamica si fa intervenire una resistenza idraulica (quadratica nella velocità), la ricerca di soluzioni offre notevoli difficoltà e l'A., a puro titolo di orientamento, trascura un termine proporzionale al prodotto della derivata seconda posizionale dello spostamento per il quadrato della derivata prima posizionale dello spostamento stesso con che ottiene un'equazione alla quale applica il metodo dei minimi quadrati. — In tal caso conviene ricercare una soluzione periodica sfasata di $\pi/2$ (non più sincrona) rispetto alla perturbazione armonica. Il resto della nota é dedicato alla deduzione di un'equazione definitiva da cui dipendono le oscillazioni finite di un filo con resistenza idraulica e sollecitato da forze aerodinamiche non stazionarie. —

Viene segnalato un problema particolare importante per il quale é possibile stabilire delle formule sintetiche seguendo i criteri indicati dall'A., ma tali formule debbono essere legittimate da esperienze numeriche. *G. Lampariello* (Messina).

Bisplinghoff, R. L., T. H. H. Pian and L. I. Levy: A mechanical analyzer for computing transient stresses in airplane structures. *J. appl. Mech.*, New York 17, 310—314 (1950).

Torre, C.: Anwendung der zyklographischen Abbildung in der Bruchtheorie. *Z. angew. Math. Mech.* 30, 254—255 (1950).

Lode, Walter: Zur thermokinetischen Theorie der Elastomere. *Z. angew. Math. Mech.* 30, 237—238 (1950).

Hydrodynamik:

Prasad, C.: On the stability of Maclaurin spheroids rotating with constant angular velocity. *Quart. J. Math. (Oxford II. Ser.)* 1, 117—121 (1950).

Auf Grund des Stabilitätskriteriums: „Der Ausdruck $(1) W - \frac{1}{2} \omega^2 I$ nimmt für stabile Gleichgewichtsfiguren den kleinsten Wert an“ (W potentielle Energie der Gravitationskräfte, ω Winkelgeschwindigkeit, I Trägheitsmoment bezüglich der Rotationsachse) werden die Maclaurinschen Ellipsoide auf ihre Stabilität untersucht. Unter Vernachlässigung der Glieder dritter und höherer Ordnung in dem durch kleine Änderungen der Achsenverhältnisse c/a und c/b gestörten, für dreiaxige Ellipsoide hingeschriebenen Ausdruck (1) wird das bekannte Ergebnis erhalten, daß die schwach abgeplatteten Maclaurinschen Ellipsoide bis zur Abzweigung der Jacobi'schen Ellipsoide stabil, alle übrigen dagegen instabil sind. *Maruhn*.

Ghosh, N. L.: An extension of Hamy's theorem to rotating gaseous bodies. *Bull. Calcutta math. Soc.* 41, 92—102 (1949).

Verf. betrachtet eine gravitierende Gasmasse, die homogen in dem Sinne ist, daß der Druck eine Funktion allein der Dichte sei. Die Gasmasse soll eine stationäre Strömung ausführen, bei der jedes Teilchen um eine feste Achse gleichförmig rotiert (mit einer variablen Winkelgeschwindigkeit, die eine Funktion des Achsenabstandes sein muß). In Verallgemeinerung eines von Hamy für Gleichgewichtsfiguren rotierender inkompressibler Flüssigkeit ausgesprochenen Satzes zeigt Verf., daß auch in seinem allgemeineren Fall die Flächen konstanter Dichte niemals ähnlich und ähnlich gelegene Ellipsoide sein können. *E. Hölder* (Leipzig).

Scheid, Francis: On the asymptotic shape of the cavity behind an axially symmetric nose moving through an ideal fluid. *Amer. J. Math.* 72, 485—501 (1950).

Wie N. Levinson in einer Arbeit gleichen Titels [*Ann. Math.*, Princeton, II. S. 47, 704—730 (1946)] zeigte, hat bei symmetrischer Anströmung die Gleichung der Begrenzungsfläche des rotationssymmetrischen Totwassers für große $|x|$ die Gestalt $(1) r = f(x) = (c x^{1/2}/\log^{1/2} x) [1 - (\log \log x)/(8 \log x) + O(1/\log x)]$. Dies folgt aus der Abschätzung des Geschwindigkeitspotentials außerhalb des Totwassers. Verf. gelingt es nun, unter einer zusätzlichen Voraussetzung durch Verschärfung der Levinsonschen Abschätzungen den Inhalt der eckigen Klammer in (1) bis auf Größen der Ordnung $O(1/\log^2 x)$ zu bestimmen. *Maruhn* (Dresden).

Sadowsky, M. A. and E. Sternberg: Elliptic integral representation of axially symmetric flows. *Quart. appl. Math.* 8, 113—126 (1950).

In einer Arbeit von Weinstein über achsialsymmetrische Strömungen (dies. Zbl. 29, 174) wurden mit Hilfe geeigneter rotationssymmetrischer Quellen- und Senkenverteilungen symmetrische Strömungen um praktisch interessierende Rotationskörper hergestellt und mit Hilfe von Besselschen Funktionen explizite Ausdrücke für Potential, Stromfunktion und Geschwindigkeitskomponenten erhalten. Verff. drücken hier diese Funktionen mittels elliptischer Integrale erster und zweiter Gattung aus, was sowohl im Hinblick auf die analytische Durchsichtigkeit wie auch

auf die numerische Behandlung zweckmäßig ist. Es werden die mit Quellen und mit Wirbeln belegte Kreislinie und Kreisscheibe behandelt, aus denen man durch Superposition Stromlinienkörper recht allgemeiner Gestalt erhalten kann. *Maruhn.*

Vladimirsky, Serge: *Mouvement différentiel non uniforme de deux plaques.* C. r. Acad. Sci., Paris **231**, 211—213 (1950).

In Fortführung einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. **36**, 254) wird jetzt angenommen, daß der hintere Teil (Klappe) des zweiten von zwei hintereinander angeordneten Streckenprofilen eine vorgeschriebene kleine, nicht notwendig gleichförmige Rotationsbewegung um seinen Anfangspunkt ausführt. Es wird, getrennt für festen kleinen Klappenausschlag und für die Rotationsbewegung der Klappe um den Drehpunkt, das komplexe Geschwindigkeitspotential bestimmt; die Potentiale lassen sich mittels elliptischer Integrale zweiter und dritter Gattung darstellen.

Maruhn (Dresden).

Dolaptchiev, Bl.: *Stabilisation des files de tourbillons.* C. r. Acad. Bulgare Sci. **2**, Nr. 2 et 3, 13—16 (1949).

Löst man die Differentialgleichungen für die Bewegung eines Wirbels, der einem System zweier paralleler Wirbelstraßen, auf denen die Wirbel mit entgegengesetzt gleicher Zirkulation äquidistant angeordnet sind, angehört, so ergibt sich für die Bahn die Beziehung $(1) \, sh^2(\varphi\pi) = \sin^2(\varphi\pi)$ (φ , φ die dimensionslosen Koordinaten des Wirbels). $\varphi = 0$ entspricht zwei zusammenfallenden Straßen, $\varphi = \frac{1}{2}$ der v. Kármánschen stabilen Konfiguration. Die Beziehung (1) wird andererseits als verallgemeinerte Stabilitätsbedingung erhalten, wenn man Bewegungen der beiden Wirbelstraßen schräg zur Flüssigkeitsbewegung noch als „stabil“ zuläßt. *Maruhn.*

Couchet, Gérard: *Compléments à propos des mouvements plans à circulation constante.* C. r. Acad. Sci., Paris **231**, 112—114 (1950).

Die Untersuchungen des Verf. über instationäre Profilbewegungen mit dauernd konstanter Zirkulation um das Profil [C. r. Acad. Sci., Paris **221**, 280—282 (1945)] werden auf den Fall des Vorhandenseins endlich vieler freier Wirbel ausgedehnt.

Maruhn (Dresden).

Viguier, Gabriel: *Structure analytique de la nouvelle mécanique des fluides visqueux.* Rev. sci., Paris **87**, 86—88 (1949).

Verf. leitet auf rein formale Weise verallgemeinerte Differentialgleichungen zäher Strömungen ab. Gegenüber den Navier-Stokesschen Differentialgleichungen werden dabei ohne nähere physikalische Begründung „Berührungskräfte“ eingeführt, die im wesentlichen darauf hinauslaufen, daß die Schubspannungen nicht mehr wie in der klassischen Theorie als linear von der Deformationsgeschwindigkeit abhängig angenommen werden.

Wuest (Göttingen).

Pieruschka, E.: *Die mathematischen Grundlagen zu einer Meßmethode des Schubmoduls zäher Flüssigkeiten.* Z. angew. Math. Mech. **30**, 264—265 (1950).

Lee, T. D.: *Note on the coefficient of eddy viscosity in isotropic turbulence.* Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. **77**, 842—843 (1950).

Für die Erfassung des Energieaustausches bei isotroper Turbulenz hat W. Heisenberg (dies. Zbl. **33**, 317; **34**, 269) aus Ähnlichkeitsbetrachtungen eine Beziehung für die scheinbare Zähigkeit abgeleitet, die eine noch freie Konstante κ enthält. Durch Vergleich mit experimentellen Ergebnissen von Simmons und Salter erhielt Heisenberg den (allerdings ziemlich unsicheren) Wert $\kappa = 0,85$. Verf. berechnet auf Grund anderer Überlegungen κ aus den Messungen von Batchelor und Townsend (1948) zu $\kappa = 0,26$ und versucht eine Erklärung für diese abweichenden Ergebnisse zu geben. Ref. weist darauf hin, daß neuerdings auch J. Rotta [Ingenieur-Arch. **18**, 60—76 (1950)] auf Grund andersartiger Überlegungen zum Wert $\kappa = 0,28$ gelangt.

Wuest (Göttingen).

Ross, Donald and J. M. Robertson: *Shear stress in a turbulent boundary layer.* J. appl. Phys., Lancaster Pa. **21**, 557—561 (1950).

Fediaevsky hat 1936 ein Näherungsverfahren zur Berechnung turbulenter Grenzschichten angegeben, das darauf beruht, daß die Schubspannung durch ein Polynom 2. bzw. 4. Grades dargestellt wird, wobei die Koeffizienten durch drei bzw. fünf Bedingungen für die Schubspannung und ihre Ableitungen an der Wand und am äußeren Rand der Grenzschicht festgelegt werden. Verf. versucht dieses Näherungsverfahren, das sich nicht bewährt hat, dadurch zu verbessern, daß er die Bedingung $\partial\tau/\partial y = 0$ am Außenrand der Grenzschicht ($y = \delta$) abändert in $\partial\tau/\partial y = -(\tau_{w0}/\delta)$, wobei τ_{w0} die anfängliche Wandschubspannung ist. Hierdurch wird dem Umstand Rechnung getragen, daß die Vorgeschichte einer Grenzschicht vor allem im Verhalten am Außenrand zum Ausdruck kommt. Die Übereinstimmung mit Messungen von Dryden (1947) wird durch diese neue Annahme zwar erheblich verbessert, ist aber noch immer unbefriedigend. *Wuest* (Göttingen).

• **Driest, Edward R. van:** Die linearisierte Theorie der dreidimensionalen kompressiblen Unterschallströmung und die experimentelle Untersuchung von Rotationskörpern in einem geschlossenen Windkanal. (Mitt. Inst. Aerodyn. an der Eidgen. Techn. Hochschule Zürich, Nr. 16.) Zürich: Verlag Leemann 1949. 31 S. mit 22 Abb., broschiert 7 Fr.

Die Arbeit zeigt theoretisch und experimentell den Kompressibilitätseffekt bei Unterschallgeschwindigkeit besonders an sehr schlanken Rotationshalbkörpern. Den Rechnungen wird jene Form der Prandtl'schen Regel zugrunde gelegt, nach welcher die Stromlinien ineinander übergeführt werden (Stromlinienanalogie), wobei sich in Schallnähe wesentliche Machzahleinflüsse ergeben. Die Versuche zeigen bei Berücksichtigung der Kanalkorrekturen gute Übereinstimmung mit der linearisierenden Theorie. *Klaus Oswatitsch* (Stockholm).

Roy, Maurice: Effet des irréversibilités dans une tuyère-foyer cylindrique. C. r. Acad. Sci., Paris **231**, 533—535 (1950).

Schäfer, Manfred: Über die Berechnung von kleinen stationären Störungen in einer gemischten Überschall-Unterschallströmung mittels einer einheitlichen Charakteristikenmethode. Z. angew. Math. Mech. **30**, 271—272 (1950).

Behrbohm, Hermann: Zum Schalldurchgang in zwei- und dreidimensionalen Düsenströmungen. Z. angew. Math. Mech. **30**, 268—269 (1950).

Richter, Hans: Die Stoßherzkurve bei allgemeiner Zustandsgleichung. Z. angew. Math. Mech. **30**, 269—270 (1950).

Wecken, Fr.: Expansion einer Gaskugel hohen Druckes. Z. angew. Math. Mech. **30**, 270—271 (1950).

Beyer, Robert T.: Radiation pressure in a sound wave. Amer. J. Phys., Lancaster Pa. **18**, 25—29 (1950).

Davies, D. R.: Shock waves in air at very high pressures. Proc. phys. Soc. London **61**, 105—118 (1948).

Baiada, Emilio: Una relazione trigonometrica e la velocità di gruppo. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. 5, 355—362 (1948). L'A. dimostra la formula

$$(1) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x \sin h x \, dx \int_{-\infty}^{\infty} A(k) \cos k x \, dk = -\frac{1}{2} [A'(h-0) + A'(h+0)]$$

per ogni valore di h in cui $A'(h)$ sia al più discontinua di 1ª specie, nelle condizioni seguenti: 1) $A(k)$ è una funzione pari su tutto l'asse reale; 2) $A(k)$ è assolutamente continua in qualunque intervallo; 3) $A'(k)/k$ è assolutamente integrabile in $(1, \infty)$. — Ciò posto, si consideri il gruppo d'onde espresso dalla funzione

$$(2) \quad f(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) \cos k [x - \varphi(k) - V(k)t] \, dk$$

con condizioni convenienti per le funzioni di k che figurano nel 2° membro. — Se

si definisce velocità V_g del gruppo la derivata della funzione $\xi(t)$ tale che

$$(3) \quad \xi \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x f^2(x, t) dx,$$

si trova, applicando la (1)

$$(4) \quad V_g \int_{-\infty}^{\infty} A^2(k) dk = \int_{-\infty}^{\infty} A^2(k) \frac{d}{dk} (k V(k)) dk.$$

Questa formula si riduce a quella classica di Lord Rayleigh nel caso che la $A(k)$ sia diversa da zero solo nell'intorno di un valore generico di k . — Il resto della nota è dedicato ad una generalizzazione della formula (1). *G. Lampariello* (Messina).

Havelock, T. H.: The forces on a submerged spheroid moving in a circular path. *Proc. R. Soc., London, A* **201**, 297—305 (1950).

Um die Kräfte abzuschätzen, die auf ein Schiff in Kurvenfahrt ausgeübt werden, wird das vereinfachte Problem einer bis zur Tiefe f unter der Wasseroberfläche eingetauchten Kugel auf kreisförmiger Bahn mit dem Radius h und der Winkelgeschwindigkeit Ω untersucht. Der Wellenwiderstand der Kugel wird für die Werte $h/f = 1$ und 4 als Funktion von $h\Omega/\sqrt{f}$ berechnet und mit dem Wert für geradlinige Bewegung bei derselben Geschwindigkeit ($h/f \rightarrow \infty$) verglichen; frühere Ergebnisse von Sretensky [*C. r. Acad. Sci., URSS* **44**, No. 9 (1946)] werden damit gleichzeitig berichtigt. Für das abgeplattete Sphäroid ($a/b = 2,5$) zeigt der Wellenwiderstand bei $b/f = 0,5$ und dem Bahnradius $h/b = 5$ nur geringe Abweichungen gegenüber den früher vom Verf. [*Proc. R. Soc., London, A* **131**, 275—285 (1931); dies. Zbl. **1**, 423] angegebenen Werten bei geradliniger Fahrt. *Pretsch* (Bonn).

Hansen, M.: Über das Ausflußproblem. *VDI-Forschungh. B* **16**, Nr. 428, 32 S. (1950).

Dieses Forschungsheft enthält eine neuerliche Durcharbeitung des gesamten Versuchsmaterials und der theoretischen Grundlagen des Ausflußproblems. Wie in den früheren Darstellungen wird die praktische Berechnung auf die Festlegung eines bestimmten Beiwertes (α) zurückgeführt, der nicht nur die Kontraktionszahl (μ) enthält, sondern auch alle übrigen Einflüsse, wie Zuflußgeschwindigkeit, Reibung, Druckverhältnisse am Drosselgerät u. dgl. umfaßt. Als neuer Gesichtspunkt wird hier eine verstärkte Berücksichtigung der Ähnlichkeitsgesetze durch Einführung der Reynoldsschen und Weberschen Kennzahl (Re und We) eingeführt und eine einheitliche Auffassung der Verhältnisse beim waagerechten und senkrechten Ausfluß angestrebt. Zur Nachprüfung dieser Verhältnisse sind weitere Versuchsreihen erforderlich. Ausführliches Schriftenverzeichnis. *Th. Pöschl* (Karlsruhe).

Scholz, N.: Ein einfaches Singularitätenverfahren zur Erzeugung von Schaufelgittern. *Z. angew. Math. Mech.* **30**, 262—263 (1950).

Strsceleitzky, M.: Strömung im Übergangsraum der schnelllaufenden Wasserturbinen. *Z. angew. Math. Mech.* **30**, 257 (1950).

Richter, W.: Lösung einer Aufgabe über Strömung in Leitungssystemen. *Z. angew. Math. Mech.* **30**, 258 (1950).

Valensi, Jacques: Sur le calcul élémentaire des coefficients caractéristiques du fonctionnement d'un turbo-réacteur pour les hauts régimes (sortie sonique). *C. r. Acad. Sci., Paris* **231**, 1032—1034 (1950).

Atomphysik.

Quantentheorie:

Nikodym, O. M.: Un nouvel appareil mathématique pour la théorie des quanta. *Ann. Inst. Henri Poincaré* **11**, 49—112 (1949).

Ein selbstadjungierter (Hermitescher und hypermaximaler) Operator im Hilbertraum hat nur für die Punkte seines diskreten Spektrums Eigenwerte und Eigen-

vektoren, die kein vollständiges Orthogonalsystem bilden, wenn das kontinuierliche Spektrum nicht leer ist. Trotzdem schreibt Dirac auch Eigenvektoren für das kontinuierliche Spektrum an, die der Orthogonalitätsrelation $(\varphi_\xi, \varphi_{\xi'}) = \delta(\xi - \xi')$ genügen und mit denen Dirac den Entwicklungssatz schreibt:

$$f = \int \varphi_\xi d\xi (\xi|f); (\xi|f) = \text{komplexe Zahlen.}$$

In dem vorliegenden Heftchen gibt Verf. eine mathematisch exakte Formulierung des Entwicklungssatzes und des Auffindens der zugehörigen kontinuierlichen Koordinaten $(\xi|f)$. Weiterhin gelingt auch eine vernünftige Definition von symbolischen Vektoren, die etwa den Diracschen φ_ξ entsprechen. Dies gelingt dem Verf. unter Benützung der Theorie der Verbände von Teilräumen des Hilbertraumes und durch ein dem Dedekindschen Schnitt verwandtes Verfahren zur Definition von „Punkten“, falls Atomelemente nicht existieren. Der Parallelismus dieser Ableitungen mit der Diracschen Theorie schmiegt sich der physikalischen Interpretation mathematischer Formeln besser an als die bisherige Ableitung etwa bei M. H. Stone (Linear Transformations in Hilbert space, New York 1932; dies Zbl. 5, 400). *G. Ludwig.*

Landsberg, Peter T.: Note on Dirac's treatment of the harmonic oscillator. Phil. Mag., J. theor. exper. appl. Phys., London, VII. S. 39, 1001—1004 (1948).

Verf. sucht eine Begründung dafür, daß das Produkt der beiden unendlichen Matrizen U und U^* mit den Elementen $U_{nm} = \delta_{n,m-1}$ und $U_{nm}^* = \delta_{n,m+1}$ zwar in der Reihenfolge $UU^* = 1$ ist, dagegen umgekehrt U^*U sich von der Einheitsmatrix unterscheidet, da als erstes Element in der Diagonalen Null steht. Diese Unsymmetrie wird studiert durch Betrachtung endlicher Matrizen, welche unitär sind und der Bedingung $UU^* = U^*U = 1$ genügen, z. B. in 4 Dimensionen •

$$U_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad U_4^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es wird gezeigt, wie das zusätzliche Element in der rechten oberen Ecke von U , bzw. in der linken unteren Ecke von U^* sich beim Grenzübergang zu unendlichen Matrizen verhält. *Flügge (Marburg).*

Kallmann, Hartmut und Max Päsler: Eine neue wellenmechanische Störungstheorie. Ann. Phys., Leipzig, VI. F. 3, 305—316 (1948).

Im Anschluß an zwei frühere Arbeiten der Verff. (dies. Zbl. 36, 280) wird die Methode der Laplace-Transformation auf Störungsprobleme der Schrödingergleichung angewandt, und zwar wird speziell der Fall behandelt, daß die ungestörte Differentialgleichung durch die Transformation in eine solche erster Ordnung übergeht, das Störungsmitglied aber vom Typus $r^2 F(r)$ ist (F = Schrödingerfunktion), so daß seine Transformierte einen Störungsterm von zweiter Ordnung liefert. Das Verfahren, das natürlich nur in speziellen Fällen anwendbar ist, eignet sich gut zur Behandlung des Starkeffektes im Coulombfeld, der eingehend behandelt wird.

Flügge (Marburg).

Toraldo di Francia, G.: A variational principle for the computation of reflection coefficients. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. 78, 298 (1950).

Auf der Strecke $x = 0 \cdots d$ steige das Potential V von seinem für $x < 0$ konstanten Anfangswert 0 auf einen für $x > d$ wiederum konstanten Endwert V_0 an. Von links falle eine ebene Welle mit einer Energie $E > V_0$ ein. Sie wird teilweise reflektiert, die Reflexionsamplitude für $x < 0$ sei ϱ , die Gesamtlösung u .

Mit $J = \int_0^d u^* \left(\frac{d^2 u}{dx^2} + (E - V) u \right) dx$ gilt dann $\delta J = 2ik_0 \delta \varrho$, wo $k_0 = \sqrt{2mE/\hbar^2}$

ist. Für eine sinngemäß angesetzte „trial function“ wird J_t berechnet. Das zugehörige ϱ sei ϱ_t . Dann wird gezeigt, daß sich aus der Gleichung $\varrho = \varrho_t - J_t/2ik_0$ mit guter Näherung die richtige Reflexionsamplitude ergibt. *Volz (Erlangen).*

Faure, Robert: Correspondance mécanique classique-mécanique ondulatoire. Intégrale du deuxième ordre indépendante du temps: conditions d'existence. C. r. Acad. Sci., Paris **226**, 1174—1175 (1948).

Faure, Robert: Correspondance mécanique classique-mécanique ondulatoire. Intégrale du deuxième ordre indépendante du temps: Étude de deux cas particuliers. C. r. Acad. Sci., Paris **226**, 1506—1508 (1948).

In beiden Arbeiten wird versucht, spezielle Integrale der klassischen Mechanik in der Quantentheorie als Integrale der Schrödingergleichung wiederzufinden. Gleichzeitig wird auf Zusammenhänge zwischen der Separierbarkeit eines Problems in der klassischen Mechanik und Quantenmechanik hingewiesen. *Flügge* (Marburg).

Kratzer, A.: Punktmechanik und Wellenmechanik. Math.-phys. Semesterber., Göttingen **1**, 189—199 (1950).

Erläuterung der aus dem Dualismus Welle-Korpuskel folgenden Abänderungen der Mechanik. *F. Hund* (Jena).

Richards, Paul I.: Notes on Feenberg's series-rearrangements. Phys. Rev., Lancaster, Pa., II. S. **74**, 835—836 (1948).

Gürsey, F.: On two-component wave equations. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. **77**, 844—845 (1950).

Die Gleichungen von Jehle (dies. Zbl. **33**, 42) und von Kilmister [Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. **76**, 568 (1949)] können als Spezialfälle der Diracschen Gleichung angesehen werden. *F. Hund* (Jena).

Donder, Th. De et J. van Isacker: Extension des identités fondamentales de la physique mathématique aux spineurs. Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. S. **34**, 317—324 (1948).

Bodiou, G.: Sur une condition mathématique permettant de limiter à quatre le nombre de composantes de la fonction d'onde de Dirac. C. r. Acad. Sci., Paris **224**, 721—723 (1947).

Bodiou, G.: Signification possible de la limitation à 4 du nombre des composantes de la fonction d'onde de Dirac. C. r. Acad. Sci., Paris **224**, 798—800 (1947).

Visconti, Antoine: Remarques sur un Mémoire de M. R. P. Feynman. C. r. Acad. Sci., Paris **230**, 928—929 (1950).

Verf. bringt einen — nach Ansicht des Ref. unberechtigten — Einwand gegen die Randwertformel in der Feynmanschen Theorie des Positrons (dies. Zbl. **37**, 124).

Höhler (Berlin).

Visconti, Antoine: Application de la transformation de Laplace à l'équation de l'opérateur d'évolution. C. r. Acad. Sci., Paris **231**, 333—335 (1950).

Verf. hat in einer früheren Note (dies. Zbl. **37**, 125) eine Integralgleichung für die „Greensche Funktion“ K der Positrontheorie von Feynman (dies. Zbl. **37**, 124) abgeleitet, wobei ein konservatives System vorausgesetzt war. Durch eine Laplace-Transformation, Reihenentwicklung im Unterbereich und Rücktransformation gelingt eine formale Auflösung nach K .

Höhler (Berlin).

Costa de Beauregard, Olivier: Connexion entre la définition des noyaux de Feynman et celle des grandeurs de champ de L. de Broglie. C. r. Acad. Sci., Paris **230**, 2073—2075 (1950).

Verf. weist auf enge Beziehungen zwischen der Theorie des Photons von L. de Broglie und der Theorie des Positrons von Feynman (dies. Zbl. **37**, 124) hin.

Höhler (Berlin).

Radicati, Luigi A.: Sopra l'estensione finita dell'elettrone nella teoria di Feynman. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. **8**, 232—234 (1950).

Bohr, N. and L. Rosenfeld: Field and charge measurements in quantum electrodynamics. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. **78**, 794—798 (1950).

In einer früheren Untersuchung (dies. Zbl. **8**, 138) zeigten die Verf., daß die Beschränkungen in der Meßbarkeit elektromagnetischer Feldstärken genau den

Vertauschungsregeln der Quantentheorie des Feldes entsprachen. Dabei werden in Gedankenversuchen die Mittelwerte der Feldstärken in endlichen Raum-Zeit-Gebieten durch die Impulse gemessen, die an bewegte Probekörper in sinnreichen ziemlich komplizierten Mechanismen übertragen werden. Jetzt werden die Dichten der elektrischen Ladung und des Stromes zunächst als klassische Größen angesehen und ihre Mittelwerte bestimmt durch Integrale von Feldstärken auf der Oberfläche von vierdimensionalen Gebieten; diese Integrale werden im Gedankenversuch mittels bewegter Probekörper in einer dünneren Schicht auf diesen Oberflächen gemessen. Die in nächster Näherung ($e^2/\hbar c$ in erster Potenz berücksichtigend) auftretende Möglichkeit der Erzeugung von Elektron-Positronpaaren bedingt eine Einschränkung der Meßbarkeit der Ladungs- und Stromdichten, die (wie nur kurz angedeutet wird) der in dieser Näherung geltenden Vertauschungsregel für diese Größen entspricht.

F. Hund (Jena).

Ma, S. T.: Relativistic invariance of the quantum theory of radiation. *Phys. Rev.*, Lancaster Pa., II. S. **72**, 1090—1096 (1947).

It is shown that the current formulation of the quantum theory of radiation, which is concerned solely with the quantization of the transverse part of the electromagnetic field, is in conformity with the principle of relativity. The relativistic invariance of the quantum theory of the neutral vector meson field is also discussed.
(Zusammenfassung des Verf.)

Ma, S. T.: Vacuum polarization in the positron theory. *Phil. Mag.*, J. theor. exper. appl. *Phys.*, London, VII. S. **40**, 1112—1128 (1949).

Im Schwinger-Tomonaga-Formalismus (dies. Zbl. **32**, 94; **33**, 234) ist der wesentliche Punkt bei der Berechnung des durch die Polarisierung des Vakuums induzierten Stromes die Auswertung des aus singulären Funktionen aufgebauten „Induktionstensors“. Tati und Tomonaga, Schwinger und Wentzel erhielten hierfür und damit auch für die Selbstenergie des Photons mit verschiedenen Methoden verschiedene Ergebnisse. Verf. rechnet den Induktionstensor mit einer dreidimensionalen Integraldarstellung für die singulären Funktionen und unter Benutzung der Integrationsmethode von Pauli und Rose [*Phys. Rev.*, II. S. **49**, 462—465 (1936); dies. Zbl. **13**, 373] aus. Er vergleicht seine Ergebnisse mit den andern und zeigt, daß die Anwendung der Pauli-Villarsschen Regularisierung (dies. Zbl. **37**, 125) zu einem divergenzfreien, relativistisch kovarianten und eichinvarianten Ergebnis führt, das mit dem von Pauli und Villars übereinstimmt. *Höhler (Berlin).*

Casimir, H. B. G. and D. Polder: The influence of retardation on the London-van der Waals forces. *Phys. Rev.*, Lancaster Pa., II. S. **73**, 360—372 (1948).

Die Verff. berechnen zunächst den Einfluß der Retardierung auf die Wechselwirkung zwischen einem neutralen Atom und einer vollkommen leitenden Ebene mit den Methoden der Quantenelektrodynamik. Als Wechselwirkungsenergie wird die sich eindeutig ergebende Differenz zwischen den divergenten Werten für eine bestimmte und für sehr große Entfernung von der Ebene gewählt. Die Retardierung macht sich bemerkbar, wenn der Abstand die Größenordnung der Wellenlänge der Atomfrequenzen erreicht, und gibt für große Abstände R einen Korrekturfaktor R^{-1} . Es wird dann die schwierigere Rechnung für den Fall zweier neutraler Atome durchgeführt. Der durch die Retardierung bedingte Korrekturfaktor am Londonschen Wert der Wechselwirkungsenergie ist wieder R^{-1} . Von den Atomeigenschaften gehen nur die statischen Polarisierbarkeiten ein. *Höhler (Berlin).*

Davidson, P. M.: The interaction of radiation and matter. *Proc. R. Soc.*, London. A **191**, 542—552 (1947).

Schafroth, M. R.: Höhere strahlungstheoretische Näherungen zur Klein-Nishina-Formel. II. *Helvetica phys. Acta* **23**, 542—546 (1950).

Prakash, Surya: Solution of generalized wave equations of order higher than 2. *Proc. Indian Acad. Sci. A* **31**, 240—260 (1950).

In Bhabhas Theorie der Elementarteilchen spielt die Gleichung

$$(\square + \chi_1^2)(\square + \chi_2^2) \cdots (\square + \chi_n^2) \psi = 0$$

eine Rolle. ($\square = d^2$ Alemberts Operator.) Verf. bestimmt mit Hilfe von Fourierintegralen die Greensche Funktion für den noch allgemeineren Fall, daß d^2 Alemberts Operator $(m + 1)$ -dimensional ist und daß jeder r -te Faktor p_r mal auftritt. Die Fälle, daß alle χ_k verschieden und daß sie alle identisch sind, werden besonders betrachtet. Bemerkenswerterweise verschwinden die δ -Singularitäten auf dem Lichtkegel für $n > 1$ ($m = 3$), auch wenn mehrere χ_k zusammenfallen. *Wessel.*

Schweber, S.: A note on commutators in quantized field theories. *Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S.* **78**, 613—614 (1950).

Eine Bemerkung von E. P. Wigner (dies. Zbl. **36**, 143) besagt, daß die Hamiltonfunktion und die Bewegungsgleichungen eines quantenmechanischen Systems die Vertauschungsrelationen der kanonischen Variablen nicht eindeutig bestimmen. Es wird gezeigt, daß diese Tatsache in der unrelativistischen Theorie erlaubt, für eine unendliche Gesamtheit harmonischer Oszillatoren einen Abschneidefaktor für hohe Frequenzen einzuführen. Die Hoffnung, mit diesem Verfahren die Schwierigkeiten der Feldtheorien beheben zu können, wird jedoch zunichte gemacht durch den Nachweis, daß die Forderung nach Lorentzinvarianz die möglichen Vertauschungsrelationen stark einschränkt und nur noch sehr schwache Abänderungen gegenüber den kanonischen zuläßt, welche keinen Einfluß mehr auf die Divergenzen haben.

Schafroth (Zürich).

Slansky, Serge: Sur les formules de normalisation et de valeurs moyennes, le photon et les particules de spin supérieur à $1/2$. *C. r. Acad. Sci., Paris* **231**, 404—406 (1950).

L'A. essaie d'interpréter les difficultés rencontrées dans la définition de la densité de présence et de la normalisation des fonctions d'ondes pour les corpuscules de spin différent de $\hbar/2$ en faisant intervenir deux types de densité de localisation du corpuscule.

G. Petiau (Paris).

Petiau, G.: Pourquoi le proton possède-t-il une charge positive? *C. r. Acad. Sci., Paris* **224**, 330—333 (1947).

Kwal, Bernard: Approximation de l'optique géométrique en théorie du corpuscule de spin 1. *C. r. Acad. Sci., Paris* **226**, 61—63 (1948).

Isacker, J. van: Généralisation de l'équation d'un particule de spin maximum 1. *C. r. Acad. Sci., Paris* **224**, 1758—1760 (1947).

Arnous, E.: Un aspect des difficultés du formalisme des particules de spin supérieur à $1/2$. *C. r. Acad. Sci., Paris* **224**, 795—797 (1947).

Peaslee, D. C.: Second order current corrections for boson fields. *Helvetica phys. Acta* **23**, 490—492 (1950).

Kernphysik.

Majumdar, R. C. and A. S. Apte: The meson field and equations of motion of point particles. *Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S.* **74**, 538—547 (1948).

Infeld und Wallace-[*Phys. Rev., II. S.* **57**, 797—806 (1940); dies. Zbl. **23**, 284] haben die Bewegungsgleichung einer als Feldsingularität aufgefaßten Punktladung im elektromagnetischen Feld abgeleitet, wobei von einer Zerlegung des Feldes in einen „symmetrischen“ $= \frac{1}{2}$ (retardierten + avancierten) und einen „Strahlungs“ $= \frac{1}{2}$ (ret. — av.) Anteil Gebrauch gemacht und die Singularität des symmetrischen Anteils in relativistisch invarianter Weise eliminiert wird. — Das gleiche Verfahren wird von den Verff. auf Feldsingularitäten des vektoriellen und

des skalaren Mesonenfeldes übertragen. Im ersteren Falle wird Übereinstimmung mit der von Bhabha [Proc. R. Soc. London A **172**, 384—409 (1937)] aufgestellten Bewegungsgleichung eines Nukleons im Vektor-Meson-Feld erhalten.

G. Molière (Hechingen).

Luttinger, J. M.: On the magnetic moments of the nucleons in meson theory. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. **75**, 1277—1278 (1949).

Verf. hat früher [Phys. Rev. **74**, 983—998 (1948) und Helvetica phys. Acta **21**, 483 (1948)] die auf Grund der pseudoskalaren Mesonentheorie resultierenden magnetischen Momente des Protons und Neutrons berechnet. Die dabei verwendeten Methoden überträgt er in vorliegender Arbeit auf den Fall der vektoriellen Mesonentheorie in derjenigen Form, in der der Mesonenfeld-Vierervektor direkt mit dem Stromdichte-Vierervektor der Nukleonen gekoppelt ist. Im Gegensatz zu der anderen Kopplungsmöglichkeit in der vektoriellen Mesonentheorie ergeben sich endliche Werte der magnetischen Momente, und zwar wird das des Neutrons stets gleich Null. Übereinstimmung mit der Erfahrung läßt sich durch geeignete Mischung der pseudoskalaren und vektoriellen Theorie erzielen, wobei die beiden Felder den π - und den τ -Mesonen zugeordnet werden können.

G. Molière.

Yukawa, Hideki: Models and methods in the meson theory. Rev. modern Phys., New York **21**, 474—479 (1949).

Verf. diskutiert die in den letzten Jahren erzielten experimentellen Ergebnisse über Kernkräfte und Mesonen und gibt eine Übersicht über die Möglichkeiten ihrer theoretischen Deutung. Auf die zahlreichen Literaturangaben sei besonders hingewiesen.

Höhler (Berlin).

Snyder, James N.: On the changing status of mesons. Amer. J. Phys., Lancaster Pa. **18**, 41—49 (1950).

Urban, Paul: Über das magnetische Moment des Proton und Neutron. Österreich. Akad. Wiss., Math.-naturw. Kl., S.-B., IIa **156**, 287—298 (1948).

Das in der Untersuchung von Fröhlich, Heitler und Kemmer über das magnetische Moment der Nukleonen (dies. Zbl. **18**, 38) auftretende Integral wird durch Abschneiden bei einem der Marchschen Fundamental-Länge (dies. Zbl. **33**, 94) entsprechenden Impuls ausgerechnet. Der empirische Wert des Momentes des Protons entspricht dann einer Mesonmasse von etwas unter 200 Elektronmassen.

F. Hund (Jena).

Bouchez, Robert: Remarques sur le modèle quasi-atomique et les transitions β nucléaires. C. r. Acad. Sci., Paris **231**, 139—141 (1950).

L'A. étudie les transitions β nucléaires en utilisant le modèle quasi-atomique et en supposant qu'une espèce nucléaire dans un état stationnaire est formée d'un petit nombre de configurations caractérisées par des paires de nombres quantiques (J, L). En utilisant la méthode des harmoniques sphériques de R. Marshak, les probabilités de transition avec émission β ou capture d'électron sont caractérisées par les variations ΔJ du moment angulaire total et ΔL du moment orbital à partir desquelles on obtient une classification des types de transition β . On montre ensuite en généralisant le critère de Konopinski que la partie radiale de l'élément de matrice nucléaire $|M_\rho|^2 = \int G_\rho^* G_\rho dr^2$ constitue un test quantitatif précis du caractère de la transition étudiée (ordre d'interdiction donné par ΔL et ΔJ). *G. Petiau*.

Jensen, J. Hans D. und Peter Jensen: Kerndipolschwingungen und Resonanzen bei hohen γ -Energien. Z. Naturforsch., Wiesbaden **5a**, 343—344 (1950).

Die von verschiedenen Autoren gemessenen Resonanzeffekte bei (γ, x)-Prozessen ($x = p, n, 2n$ oder Spaltung) deuten Verff. im Anschluß an die Vorstellungen von Goldhaber und Teller als eine Kollektivbewegung aller Protonen gegen alle Neutronen. Dabei wird im Sinne des Tröpfchenmodells die Schwingung mit den Methoden der Hydrodynamik als eine Bewegung der „Neutronenflüssigkeit“ gegenüber der

„Protonenflüssigkeit“ betrachtet. Aus der abgeleiteten Schwingungsgleichung für die Dichteveränderung der beiden Komponenten (die Gesamtdichte wird konstant vorausgesetzt) ergeben sich unter Berücksichtigung der Randbedingungen die Eigenfrequenzen proportional zu $A^{-\frac{1}{2}}$ (A = Massenzahl). Teller und Goldhaber, die sich die Bewegung als Schwingung einer starren Neutronenkugel gegenüber einer starren Protonenkugel vorstellen, berechnen dagegen Eigenfrequenzen proportional zu $A^{-\frac{1}{2}}$. Der von den Verff. gegebene Vergleich mit den Experimenten scheint auf eine bessere Übereinstimmung mit dem Flüssigkeitsmodell hinzuweisen. *Ecker.*

Bohr, Aage and V. F. Weisskopf: The influence of nuclear structure on the hyperfine structure of heavy elements. *Phys. Rev.*, Lancaster Pa., II. S. 77, 94—98 (1950).

Unter Zugrundelegung verschiedener einfacher Modellvorstellungen von der räumlichen Verteilung des Kernmagnetismus wird das magnetische Moment schwerer Kerne berechnet. Die Hyperfeinstrukturaufspaltung zeigt dabei für die verschiedenen Verteilungen Unterschiede von meßbarer Größe. Damit kann durch den Vergleich mit experimentellen Werten, wie sie für Rb^{85} und Rb^{87} vorliegen, auf die räumliche Verteilung des Kernmagnetismus hinsichtlich Spin und Bahnmoment geschlossen werden. *Kreyßig (Darmstadt).*

Cuer, Pierre et Max Morand: Sur le pouvoir d'arrêt à l'intérieur des noyaux. *C. r. Acad. Sci.*, Paris 226, 659—661 (1948).

Ein Nukleon, dessen kinetische Energie noch klein genug für unrelativistische Behandlung, aber größer als diejenige der Nukleonen im Innern eines Kerns sei, dringt in einen Kern ein. Es wird eine Reihe von Stößen darin erfahren, ehe es zur Ruhe kommt. Verff. übertragen daher die in der Atomhülle übliche Methode der Berechnung von Energieverlusten (Bohrsche Bremsformel) auf diesen Vorgang, der in der Entstehung von Ultrastrahlungsternen eine Rolle spielen dürfte und in übersichtlicher Form schon mehrfach untersucht worden ist. *Flügge (Marburg).*

Koppe, Heinz: Die Energieverteilung thermischer Neutronen. *Z. Phys.*, Berlin 125, 59—97 (1948).

Bei der Bremsung von Neutronen auf thermische Geschwindigkeiten in einem unendlichen großen Block aus bremsender, wasserstoffhaltiger Substanz, läßt sich leicht zeigen, daß im stationären Zustand eine Maxwell-ähnliche Geschwindigkeitsverteilung mit einem (dv/v^2) -Schwanz bei höheren v entsteht (Fermi 1935). Für eine genauere Rechnung sind zwei Effekte zu berücksichtigen, die in Teil A und B der Arbeit nacheinander behandelt werden. A.: Wird v vergleichbar mit der thermischen Geschwindigkeit der bremsenden H-Atome; so können letztere nicht mehr als ruhend betrachtet werden; die Neutronen werden bei manchen Stößen nicht gebremst, sondern beschleunigt. Die Stoßzahl $Z(v, v') dv'$, welche die sekundliche Anzahl von Stößen angibt, die ein Neutron der Geschwindigkeit v derart erleidet, daß es nach dem Stoß die Geschwindigkeit v' in dv' hat, wird daher für $v' > v$ nicht mehr gleich Null, und an Stelle einer Volterraschen tritt eine Hopfsche Integralgleichung. Für diese wird ein Lösungsverfahren durch sukzessive Näherung entwickelt und Ergebnisse tabuliert. Es bestätigt sich das bekannte Resultat, daß für Energien unter etwa $2 kT$ die Maxwellverteilung, für merklich größere die asymptotische Fermiverteilung (dv/v^2) eintritt. — B.: Der Einfluß der chemischen Bindung im Paraffin wird unter Vernachlässigung der Temperaturbewegung untersucht. Die starke Variation des Streuquerschnitts je Proton, die hierbei bekanntlich auftritt, ergibt sich bei kleineren Geschwindigkeiten als Folge der Gitterstruktur, bei etwas größeren als Folge der chemischen CH_2 -Bindung. Die Methode der Rechnung lehnt sich eng an Nordheims Berechnung der Elektronenstöße in der Theorie der Metallelektronen an [*Ann. Phys.*, V. F. 9, 607—640; 641—678 (1931)]. In einer Kurve wird anschaulich gezeigt, daß die Gitterwechselwirkung der Bremsung der Neutronen eine Grenze setzt, die (ganz roh) einer effektiven Temperatur von 100°K entspricht.

Eine Abkühlung des Paraffins unter diese Grenze hat also keinen Sinn; ein Resultat, das qualitativ wohlbekannt ist. *Flügge* (Marburg).

Hückel, Erich: Zur Theorie der Streuung langsamer Neutronen an freien Protonen. (Berichtigung.) *Z. Naturforsch.* 3a, 308—309 (1948).

Cacciapuoti, N. B.: Origine della radiazione cosmica. *Pubbl. Fac. Sci. Ing. Univ. Trieste*, Ser. A, Nr. 34, 7 S. (1950).

Amerio, Alessandro: Sulle origini dei raggi cosmici. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur.*, VIII. S. 9, 9—15 (1950).

Astronomie. Astrophysik. Geophysik.

Armellini, Giuseppe: Il moto del perielio di Mercurio nell'ipotesi di un assorbimento del flusso gravitazionale attraverso i mezzi materiali. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur.*, VIII. S. 5, 288—294 (1948).

In questo lavoro l'A. ammette che il flusso gravitazionale venga assorbito dalla materia in una misura che può essere determinata per analogia alla legge di assorbimento della luce da parte di un mezzo non perfettamente trasparente; dopo aver percorso un cammino di lunghezza l in un mezzo materiale di densità ρ , l'intensità J di un raggio gravitazionale si riduce ad $J' = J e^{-a\rho l} \sim J(1 - a\rho l)$, essendo a un coefficiente di assorbimento. — Muovendo da questa ipotesi si può facilmente dedurre che: 1) la massa apparente M' del Sole, supposto sferico omogeneo, risulta minore della sua massa reale M ; 2) il baricentro della massa apparente non coincide col centro della sfera, ma trovasi ad una distanza ε dal centro stesso. — Una tale distanza ε è legata al coefficiente a di assorbimento dalla relazione $\varepsilon = a\rho M R^2/M'$ se ρ ed R indicano rispettivamente la densità e il raggio del Sole. — Ciò posto, l'A. studia il moto di un pianeta puntiforme nel campo del Sole, tenendo conto della legge precedente di assorbimento del flusso gravitazionale ed arriva a stabilire l'esistenza di un avanzo $\delta\omega$ del perielio dato dalla formula $\delta\omega = 2\pi\varepsilon/p$, dove p è il parametro dell'orbita planetaria. Se allora si considera per es. lo spostamento del perielio di Mercurio, si trova, essendo ε circa 4 km, che il coefficiente di assorbimento dovrebbe essere, nel sistema CGS, dell'ordine di 10^{-16} o anche minore. — Questo valore è dunque molto più piccolo di quello indicato da Q. Majorana [*Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur.*, V. S. 30, 75—79 (1921)] o da Laager (*Versuch mit der Drehwaage die Abhängigkeit der Gravitation vom Zwischenmedium nachzuweisen. Diss. Univ. Zürich; Bern* 1904) ed Erisman [*cf. Vierteljahrsh. naturforsch. Gesellsch. Zürich* 53, 157—185 (1908)]. — Se si ammette che lo spostamento del perielio di Mercurio sia spiegato dalla teoria della relatività (seguendo la maggior parte degli astronomi) con che l'assorbimento gravitazionale deve essere tanto piccolo da non provocare alcuna perturbazione apprezzabile, segue dai calcoli dell'A. che il valore di a difficilmente potrebbe superare 10^{-18} . *G. Lampariello* (Messina).

Jekhowsky, Benjamin de: Démonstration simple et directe du théorème d'Euler relatif aux orbites paraboliques. *C. r. Acad. Sci., Paris* 230, 1738—1740 (1950).

Ableitung der Eulerschen Gleichung $6\tau = (r_1 + r_2 + s)^{3/2} - (r_1 + r_2 - s)^{3/2}$ aus den Beziehungen (1) $r_1 r_2 \sin(v_2 - v_1) = g\sqrt{2g}$, (2) $g = \tau - \tau^3/6r^3$, wo $\tau = k(t_2 - t_3)$ und r die heliozentrische Entfernung zur mittleren Epoche t ist, bzw. unter Heranziehung der Lagrangeschen Entwicklungen (3) $f_1 = 1 - \tau_1^2/2r^3$, $f_2 = 1 - \tau_2^2/2r^3$ mittels Umformungen, die die Annahme voraussetzen, daß die Differenz $v_2 - v_1$ der wahren Anomalien zu den Epochen t_1, t_2 klein ist. *Volk* (Würzburg).

Labs, D.: Eine einfache Näherungslösung für das Strahlungsgleichgewicht einer „grauen“ Atmosphäre. *Z. Astrophys.*, Berlin 27, 153—155 (1950).

Es wird eine sehr einfache und doch gute Näherungslösung für das Strahlungsgleichgewicht einer „grauen“ Atmosphäre, d. h. einer Atmosphäre mit einem frequenzunabhängigen Absorptionskoeffizienten, gegeben und mit anderen Lösungen verglichen. *H. Vogt* (Heidelberg).

Schirmer, Herbert: Über die Ausbreitung von Stoßwellen in der Sonnenatmosphäre. *Z. Astrophys.*, Berlin 27, 132—152 (1950).

Nach Biermann ist die Turbulenz der Chromosphäre auf fortschreitende Druckwellen zurückzuführen, die durch die Stöße der aus der Wasserstoffkonvek-

tionszone aufsteigenden Granulationselemente gegen die stabil geschichtete Photosphäre in dieser erregt werden. Verf. untersucht jetzt die Ausbreitung dieser Stoßwellen in der Sonnenatmosphäre nach hydrodynamischen und thermodynamischen Gesichtspunkten. *H. Vogt (Heidelberg).*

Underhill, Anne B.: On model atmospheres for the high-temperature stars. *Danske Vid. Selsk., mat.-fys. Medd.* 25, Nr. 13, 53 S., 5,—kr. (1950).

Da die bis jetzt vorliegenden Beobachtungsergebnisse über die Temperaturen der Früh-Typ-Sterne sehr stark voneinander abweichen, versucht Verf. die effektive Temperatur eines Früh-Typ-Sternes bestimmten Spektrums auf theoretischem Wege an Hand einer Modell-Sternatmosphäre zu bestimmen. Es wird zu diesem Zweck eine Modell-Atmosphäre für einen Stern hoher Temperatur berechnet, und an Hand dieses Modells wird der Zusammenhang zwischen Spektraltyp und effektiver Temperatur (die durch den vom Stern ausgehenden Gesamt-Nettostrom an Energie festgelegt ist) ermittelt. Verf. findet dabei für einen O9-Stern eine effektive Temperatur von $36\,800^\circ$, die beträchtlich höher ist als die z. B. von Petrie für einen solchen Stern aus den relativen Intensitäten der He I- und He II-Linien abgeleitete Anregungstemperatur von $30\,700^\circ$. *H. Vogt (Heidelberg).*

Kopal, Zdeněk: Radial oscillations of compressible gas spheres. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* 36, 72—84 (1950).

Die Pulsationstheorie der regelmäßig veränderlichen Sterne („ δ -Cephei Sterne“) führt auf eine schon von Eddington (seit 1918) diskutierte Differentialgleichung 2. Ordnung, welche die Abhängigkeit der als klein vorausgesetzten relativen Schwingungsamplitude vom Mittelpunkt Abstand r wiedergibt. In diese Differentialgleichung geht der Aufbau, d. h. die Verteilung von Druck und Dichte im Innern des als gasförmig und kugelsymmetrisch aufgebaut vorgestellten Sterns ein. Wenn nicht besondere Bedingungen hinsichtlich des Aufbaus erfüllt sind, läßt sich die Differentialgleichung nur numerisch integrieren. Man kennt aber bisher 4 Modelle (entdeckt von Sterne, 1937 und Prasad, 1948) bei denen die ziemlich speziellen Annahmen über den Aufbau eine analytische Behandlung ermöglichen; dabei hat sich stets (ebenso wie bei den numerisch integrierten Modellen) ein diskretes Spektrum von Eigenschwingungen ergeben. Verf. hat kürzlich gezeigt [*Astrophys. J.* 111, 395 (1950)] daß in allen 4 Fällen eine Reduktion der Differentialgleichung auf die hypergeometrische Form möglich ist. In vorliegender Note wird in allgemeiner Weise die Frage beantwortet, ob es noch weitere Modelle gibt, bei denen eine solche Reduktion auf die hypergeometrische Differentialgleichung möglich ist. Das Ergebnis ist, daß es außer den schon bekannten nur solche gibt, bei denen die Schwerebeschleunigung $\sim 1/r^2$ ist, so daß die ganze Masse in der nächsten Umgebung des Sternmittelpunktes konzentriert sein muß. Allerdings muß die Dichte auch an der Oberfläche wieder $\rightarrow \infty$ gehen, aber in solcher Weise, daß die Masse der Oberflächenschichten keinen merklichen Beitrag zur Schwerebeschleunigung liefert. Bemerkenswert ist aber, daß bei den jetzt gefundenen Modellen zum ersten Male in der Theorie pulsierender Sterne außer dem diskreten sich auch ein kontinuierliches Spektrum von Eigenfrequenzen ergibt. Die Frage, ob diese Modelle auch physikalische Bedeutung besitzen und welche, wird zukünftigen Untersuchungen überlassen. *L. Biermann (Göttingen).*

Reiz, Anders: A composite giant star model with isothermal core. II. *Ark. Astron., Stockholm* 1, Nr. 2, 7—10 (1950).

Fortsetzung einer Arbeit, in der Verf. das Modell eines Riesensternes diskutierte, das einen wasserstoff-freien isothermen Kern besitzt und bei dem die Energieerzeugung nach dem Bethe-v. Weizsäcker-Zyklus innerhalb einer genügend heißen, den Kern umgebenden, konvektiven Zone erfolgt. Verf. zeigt jetzt, daß die Temperatur der energieerzeugenden Schicht nicht, wie er bisher angenommen hatte, bei ungefähr 20 Millionen Grad, sondern bei etwa 32 Millionen Grad liegen muß, um

die Energieerzeugung mit der Leuchtkraft des Sternes in Übereinstimmung zu bringen.

H. Vogt (Heidelberg).

Bouvier, Pierre: Remarque sur l'effet Compton et l'hypothèse du corps gris en astrophysique. Arch. Sci., Genève 2, 448—453 (1949).

Die Gleichung für den Strahlungstransport der Gesamtintensität in einer Atmosphäre mit Thomson-Streuung an freien Elektronen (\propto frequenzunabhängig!) wird erweitert durch Berücksichtigung der Comptonschen Streuung. Letzterer Effekt wird als kleine Korrekturgröße behandelt und die Transportgleichung bis zu Gliedern in erster Ordnung von $h \nu / m c^2$ angegeben.

G. Burkhardt (Weil/Rhein).

Martynov, D. Ja.: Die säkulare Massenabnahme der Sterne als Evolutionsfaktor. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 60, 1149—1152 (1948) [Russisch].

Die Massenabnahme eines rotierenden Sternes durch Strahlung oder durch Materieauswurf, z. B. im Stadium eines Neuen Sternes und eines Wolf-Rayet-Sternes oder durch Abfließen von Materie längs des Äquators bei schnell rotierenden Komponenten enger Doppelsysteme oder durch Korpuskularauswurf, wie er sogar bei verhältnismäßig kalten Sternen von der Art der Sonne stattfindet, ist mit einer Abtragung des Rotationsmomentes verbunden. Verf. kommt nun zu dem Ergebnis, daß diese Abtragung des Rotationsmomentes zu einer Verlangsamung der Rotation eines Sternes führt und daß durch diesen Prozeß schon innerhalb verhältnismäßig kurzer Zeiträume sehr schnell rotierende Sterne in langsam rotierende übergehen können.

H. Vogt (Heidelberg).

Schatzman, Evry: Sur certains trajets évolutifs des étoiles. I. Remarques préliminaires. Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. S. 35, 1141—1152 (1949).

O. Struve hat die Vermutung ausgesprochen, daß es bei Sternen mit genügend großem Drehimpuls durch Rotationsinstabilität zur Abtrennung von Materie kommt und sich die Sterne aus diesem Grunde mit fortschreitender Entwicklung im Hertzsprung-Russell-Diagramm entlang der Hauptreihe nach abwärts bewegen. Verf. untersucht nun, ob sich diese Hypothese aufrecht erhalten läßt, und kommt zu dem Ergebnis, daß ihr Schwierigkeiten entgegenstehen.

H. Vogt (Heidelberg).

Bagge, Erich: Eine Deutung der Expansion des Kosmos. Z. Phys., Berlin 128, 239—254 (1950).

Im Rahmen der hier wiedergegebenen Betrachtungen wird darauf verzichtet, die Ausdehnung des Kosmos als Problem einer zeitabhängigen Metrik des gekrümmten Raumes anzusehen, wie das bei fast allen modernen Theorien der Kosmologie geschieht, und es wird zu zeigen versucht, daß sich das Hubblesche Expansionsgesetz aus einem einfachen physikalischen Postulat quantitativ für einen einfachen euklidischen Raum ableiten läßt. Weiter wird die Ansicht ausgesprochen, daß die Auslösung des Expansionsphänomens der Welt vielleicht durch eine konsequente Weiterführung von Fermis Theorie über den bei der Entstehung der kosmischen Ultrastrahlung wirksamen Beschleunigungsmechanismus zu erklären sei.

H. Vogt.

Amerio, Alessandro: L'espansione dell'Universo e la pressione della luce. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. 9, 15—16 (1950).

Palmén, E.: Contribution to the theory of the general atmospheric circulation. Comment. phys.-math., Soc. Sci. Fennica 15, Nr. 4, 24 S. (1950).

Der „Beitrag“ führt eine von H. Jeffreys 1926 vorgetragene Auffassung über die Aufrechterhaltung der Westwinddrift der mittleren Breiten wider die innere und Bodenreibung der Luft weiter aus. Die Theorie der allgemeinen Zirkulation ist für die Wettervorhersage von ausschlaggebender Bedeutung; Untersuchungen der zum großen Teil noch ungelösten Zirkulationsprobleme sind also besonders aktuell. Die Erfahrung lehrt uns, daß in der Atmosphäre in den äquatornahen Breiten östliche und in den mittleren bis hohen Breiten westliche Strömungen vorherrschen, außerdem aber meridionale Massenverlagerungen auftreten, die vorzugsweise die Temperaturverteilung auf der Erde bedingen. Aufgabe der Theorie ist es, diesen Erfahrungsinhalt in ursächlicher Verknüpfung darzustellen und ihn mathematisch zu beschreiben. Die

Schwierigkeit dieser Arbeit liegt darin, daß mit Durchschnittswerten gerechnet werden muß, wodurch die Anwendung der physikalischen Gesetze, die mit Ausnahme der Thermodynamik für individuelle Größen definiert sind, den natürlichen Verhältnissen nicht vollständig entspricht. — In der Royal Meteorological Society ist dieses Thema wiederholt Gegenstand der Sitzungsverhandlungen gewesen, über die im Publikationsorgan der Gesellschaft, dem *Quarterly Journal*, eingehend berichtet ist. Die eingangs erwähnte Arbeit und die an sie sich anschließenden Kontroversen sind hier zu finden. Jeffreys berechnet zwei Größen: 1. den Fluß des Rotationsmoments in bezug auf die Erdachse der Masse des Einheitsvolumens als Integral über einen ganzen Breitenkreis und die ganze Höhe der Atmosphäre, 2. den Fluß des Reibungsmomentes in bezug auf die Erdachse für die Zone zwischen zwei Breitenkreisen von der Atmosphäre in die Erde. Er stellt die Hypothese auf, daß das Rotationsmoment der Masse zwischen zwei Breitenkreisen unveränderlich ist, und schließt daraus, daß die Differenz des Flusses des oben definierten Rotationsmomentes durch die beiden Breitenkreise gleich dem zwischen diesen erzeugten Reibungsmoment sein müsse. Hiernach ist bei jeder stationären Zirkulation der zonalen eine bestimmte meridionale Strömungskomponente zugeordnet. — Auf Grund dieser Beziehungen berechnet Verf., daß zur Aufrechterhaltung einer stationären Strömung zwischen 40° und 60° N längs des $40.$ Breitenkreises eine meridionale Komponente von ca. 50 cm sec^{-1} notwendig ist, um den Momentenfluß aus der Atmosphäre zur Erde infolge der Reibung zu kompensieren. Dieses Ergebnis wird durch eine Berechnung der meridionalen Komponente im Tropopausen-Niveau an Hand neuester aerologischer Befunde gestützt. Zunächst wird sie mit Hilfe der Bewegungsgleichungen in Ertelscher Fassung durch die zonale Komponente und deren Ableitungen nach der meridionalen und vertikalen Koordinate ausgedrückt. Diese Größen werden den Beobachtungen bzw. ihren graphischen Darstellungen entnommen. Die Übereinstimmung der beiden, nach den genannten Verfahren gewonnenen Werte für die meridionale Komponente ist angesichts der noch unvollkommenen Meßmethoden befriedigend. — In der „Physikalischen Hydrodynamik“ sind die norwegischen Autoren zu erheblich größeren Werten gekommen. Sie berechneten ihre Werte auf Grund der Annahme, daß das durchschnittliche meridionale Temperaturfeld sich aus der Strahlung und der vertikalen meridionalen Zirkulation ableite. Die Bearbeitung dieses Erfahrungsinhaltes macht die Untersuchung der Bedeutung der Antizyklogen und Zyklonen der mittleren Breiten für die allgemeine Zirkulation notwendig, die Verf. als spätere Arbeit in Aussicht stellt. Die folgenden Abschnitte gehen auf die neuesten Forschungen der Strömungen in der Stratosphäre, den polnahen Gebieten und in der südlichen Hemisphäre ein, deren besondere Funktionen im Strömungshaushalt zu zeigen eine leistungsfähige Theorie instande sein muß. — Schon F. M. Exner, der 1917 als erster die heutige Auffassung vom Wesen der allgemeinen Zirkulation begründet, hat darauf hingewiesen, daß die Theorie nicht einseitig kinematisch sein dürfe, wie sie es anfangs war, sondern „daß zur Erklärung der jetzt wirklich bestehenden Bewegungen Wärmezufuhr und Reibung nicht vernachlässigt werden dürfen“. In neuester Zeit hat P. Raethjen diesen Gedanken mit Nachdruck in dem Abschnitt „Wärmehaushalt und allgemeine Zirkulation“ des Lehrbuches von L. Weickmann „Synoptische Witterungskunde und Wettervorhersage“, das leider infolge des Krieges nicht den Weg in den Buchhandel gefunden hat, vertreten. Damit ist ein noch weiterer Schritt angebahnt, die allgemeine Zirkulation überhaupt als Theorie des Energieumsatzes in der Atmosphäre von der Einstrahlung bis zur Ausstrahlung mit den Zwischengliedern Wärmeverteilung, potentielle Energie der Schwerkraft, kinetische Energie, elastische Energie der Schwingungen, Energie der Meeresströmungen, des luftelektrischen Feldes, der Niederschläge, der Assimilation aufzufassen. B. Neis (Berlin).

Scholte, J. C.: On the propagation of seismic waves. II. Proc. Akad. Wet. Amsterdam 50, 10—17 (1947).

Elsasser, Walter M.: The hydromagnetic equations. Phys. Rev., Lancaster Pa., II 8, 79, 183 (1950).

Strömende Flüssigkeiten im Plasmazustand führen elektrische Ströme und Magnetfelder mit sich. Die Wechselwirkung zwischen dem Geschwindigkeitsfeld und den elektrodynamischen Feldgrößen wird durch die hydrodynamischen und die Maxwellschen Gleichungen beschrieben. Bei ersteren wird Inkompressibilität des Mediums, bei letzteren Vernachlässigbarkeit des Verschiebungsstromes vorausgesetzt. Dann läßt sich durch Umformung und Einführung neuer Variablen aus den beiden Vektorgleichungen ein neues symmetrisches Paar ableiten von ähnlicher Bauart wie die Navier-Stokesschen Gleichungen, das für verschwindendes Feld in diese übergeht. Außer der gewöhnlichen Viskosität tritt eine zweite Materialkonstante als „magnetische“ Viskosität auf. In solchen „hydromagnetischen“ Medien sind demnach ebenfalls Turbulenzphänomene zu erwarten. Für kompressible Flüssigkeiten konnte ein ähnlich einfaches symmetrisches Gleichungssystem nicht gefunden werden.

Burkhardt (Weil/Rhein).